Вычислительные социальные науки, 2024-25 уч. год
Дискретная математика
Булевы функции (19 апреля 2025 г.)
В. В. Кочергин, А. В. Михайлович

Задача 1. (a) Сколько функций алгебры логики $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ удовлетворяет условию $f(0,0,0,0) = f(1,1,1,1)$?

(b) Сколько функций алгебры логики $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ удовлетворяет условию $f(0,0,\ldots,0) = f(1,1,\ldots,1)$?

Задача 2. Сколько функций алгебры логики $f(x,y,z)$ существенно зависят от всех трёх переменных x, y, z?

Задача 3. Составьте таблицы истинности для функций, заданных следующими формулами.

(a) $\overline{\overline{x}\&\overline{y}}$

(b) $\overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$

(c) $\overline{x} \vee y$;

(d) $x \vee \overline{y}$;

(e) $x \wedge \overline{x}$;

(f) $(x \vee y) \wedge \overline{x \wedge y}$;

(g) $x \to y$;

(h) $(x \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge y)$.

Задача 4. Решить систему

(a) $\begin{cases} x \oplus y \oplus z = xy \\ ((x \to y) \to (x \to z)) \to (\overline{y} \to \overline{z}) = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x \oplus y \oplus z = 1 \\ xy \oplus z = 0 \end{cases}$

Задача 5. На скольких наборах $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ функция алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ обращается в 1?

(a) $x_1x_2x_3x_4 \oplus x_1x_2x_3x_5 \oplus x_1x_2x_4x_5 \oplus x_1x_3x_4x_5 \oplus x_2x_3x_4x_5$, $(n = 5)$;

(b) $x_1x_2x_3 \oplus x_3x_4x_5 \oplus x_6$, $(n = 6)$;

(c) $f(x_1, \ldots, x_n) = (\ldots((x_1 \to x_2) \to x_3) \to \ldots) \to x_n$.

Задача 6. Используя таблицы истинности, доказать эквивалентность формул.

(a) $\overline{x \to y}$ и $x\overline{y}$;

(b) $x \sim y$ и $(x \to y)\&(y \to x)$;

(c) $x \to (y \vee z)$ и $(x \to y) \vee (x \to z)$.

Задача 7. Используя дополнительно основные эквивалентности, выяснить, эквиваленты ли формулы

(a) $xy \vee z$ и $\overline{\overline{x}(\overline{y} \vee \overline{z})}$;

(b) $xy \oplus xz \oplus yz$ и $\overline{\overline{xy} \vee \overline{xz} \vee \overline{yz}}$;

(c) $(\overline{x} \to y) \to (\overline{x}y \sim (x \oplus y))$ и $(\overline{xy} \to x) \to y$;

(d) $(x \oplus yz) \to (\overline{x} \to (y \to z))$ и $x \to ((y \to z) \to x)$;

(e) $\overline{((x \vee y) \to yz) \vee (y \to xz)} \vee (x \to (\overline{y} \to z))$ и $(x \to y) \vee z$.

Задача 8. Представить в виде СДНФ

(a) $x \vee y$;

(b) $(x_1 \vee x_2) \to x_3$;

(c) (01010001);

(d) $(x_1 \oplus x_2)(x_3 \to \overline{x_2} x_4)$;

Задача 9. Представить в виде СКНФ

(a) $x_1 \oplus x_2$;
(b) $x_1 \overline{x_2} \vee x_1 x_3 \vee \overline{x_2} x_3$;
(c) (00101110).

Задача 10. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $g(y_1, \ldots, y_m)$ — произвольные функции алгебры логики, существенно зависящие от всех своих переменных. Показать, что функция

$$h(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_m) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, g(y_1, \ldots, y_m))$$

также существенно зависит от всех своих переменных.