Вычислительные социальные науки, 2024-25 уч. год
Дискретная математика
Комбинаторика-1 ()
В. В. Кочергин, А. В. Михайлович

Задача 1. «Словом» будем называть любую конечную последовательность из букв некоторого алфавита.

В некотором языке алфавит состоит из букв «А», «Б», «В», «О», «Ы». Сколько в этом языке

(a) слов длины 2, у которых первая буква гласная, а вторая согласная?
(b) слов длины 4?
(c) слов длины 4, не начинающихся с буквы В?
(d) слов длины 4, у которых первая буква не совпадает со второй?
(e) слов длины 4, у которых все буквы различны?
(f) слов, у которых все буквы различны?
(g) слов длины 4, у которых все буквы различны и первая не является буквой «А»?
(h) слов, у которых все буквы различны и последняя не является буквой «А»?
(i) слов длины 4, содержащих ровно одну букву «Б»?

Задача 2. В автобусе 20 свободных мест. Вошли (a) 25; (b) 5 человек. Сколько есть вариантов рассадить их по свободных местам (каждый вошедший пассажир должен сесть на своё место, стоячих остаться не должно)?

Задача 3. Есть 10 человек. Сколько есть способов составить из части из них колонну длиной (a) 3; (b) 11; (c) 10 человек?

Задача 4. Для бизнес-ланча предлагается на выбор 3 варианта горячего и 4 варианта супа. Сколько всего вариантов бизнес-ланча можно заказать?

Задача 5. Из города A в город B идут три дороги, а из города B в город C — 4 дороги. Сколькими способами можно проехать из города A в город C?

Задача 6. Для бизнес-ланча предлагается на выбор 4 варианта горячего, 2 варианта супа и 3 варианта салата. Сколько всего вариантов бизнес-ланча можно заказать?

Задача 7. В офисе стоит a) 10; b) 7 компьютеров, каждый соединен сетевым проводом с тремя другими. Сколько всего проводов?

Задача 8. Сколькими способами можно разбить 10 человек на две баскетбольные команды?

Задача 9. Доказать, что для биномиальных коэффициентов выполняются следующие равенства:

(a) $C_n^k = C_n^{n-k}$;
(b) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$;
(c) $C_{n-k+1}^k - C_{n-k-1}^{k-2} = C_{n-k-1}^{k-1} + C_{n-k}^k = \frac{n}{n-k}\, C_{n-k}^k$.

Задача 10. Используя метод математической индукции, доказать равенство для всех $n \geq 0$.

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k.$$

Знак $\sum$ *обозначает сумму всех слагаемых, индексируемых от* 0 *до* n*, то есть*

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = C_n^0 x^0 + C_n^1 x + \ldots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n.$$

Задача 11. Сколькими способами можно выписать в ряд цифры от 0 до 9 так, чтобы четные цифры шли в порядке возрастания, а нечетные — в порядке убывания?

Задача 12. a) Сколько существует десятизначных чисел, в записи которых цифры расположены по убыванию? b) А пятизначных? c) А если снять ограничение на число знаков?

Задача 13. Сколькими различными способами можно прочитать слово «строка», двигаясь вправо или вниз?:

С	Т	Р	О	К	А
Т	Р	О	К	А	
Р	О	К	А		
О	К	А			
К	А				
А					

Задача 14. (a) Сколькими способами можно выбрать 4 человек из 10?
- (b) Сколькими способами можно выбрать 6 человек из 10?
- (c) В городе Нью-Васюки все улицы — прямые, и причем любые две улицы либо параллельны, либо пересекаются под прямым углом, а сам город имеет форму прямоугольника, длиной в 6 кварталов и шириной в 4 квартала. Сколькими способами можно пройти из левого нижнего угла в правый верхний, двигаясь только по улицам и только вверх и вправо?
- (d) Почему ответы на все эти пункты совпадают?
- (e) В городе Нью-Васюки сменился мэр, после чего к нему присоединили часть нью-васюковской области. В результате город сохранил свою планировку, но стал иметь форму прямоугольника со сторонами l и m кварталов. Сколькими способами теперь можно пройти из левого нижнего угла в правый верхний?

Задача 15. В правом верхнем углу города Нью-Васюки (длиной l кварталов и шириной m кварталов) находится телеграф. Ровно на один квартал ниже его находится библиотека. Ровно на один квартал левее телеграфа находится банк. Сколькими способами можно добраться из левого нижнего угла до
- (a) библиотеки?
- (b) банка?
- (c) телеграфа?
- (d) Доказать формулу $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$.
- (e) Доказать формулу $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Задача 16. У одного школьника есть 6 книг по математике, а у другого — 8. (Все книги — разные.) Сколькими способами они могут обменять три книги одного на три книги другого?

Задача 17. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна четная цифра?

Задача 18. Сколько существует 7-значных чисел, в которых ровно две четные цифры и перед каждой четной цифрой обязательно стоит нечетная?

Задача 19. Сколько существует семизначных чисел, в записи которых есть ровно три единицы?

Задача 20. На одной из кафедр университета работают 13 человек, причём каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. Десять человек знают английский, семеро — немецкий, шестеро — французский, пятеро знают английский и немецкий, четверо — английский и французский, трое — немецкий и французский. Выяснить:

(a) сколько человек знают все три языка;
(b) сколько человек знают ровно два языка;
(c) сколько человек знают только английский язык.

Задача 21. Из ста женщин африканского племени Мумбо-Юмбо 40 умеют делать ожерелья из кокосов, 70 умеют вязать набедренные повязки из банановой травы и 30 женщин умеют делать оба дела. Сколько женщин в племени не смогут сделать ни того, ни другого?

Задача 22. В том же самом племени Мумбо-Юмбо из предыдущей задачи существует особый класс женщин (всего 15), способных изловить и приготовить слона. Известно, что 7 женщин могут приготовить слона и сделать ожерелье, 5 женщин смогут приготовить слона и связать повязку и только три женщины умеют делать все три дела. Сколько дам в племени не могут сделать ничего (ни изловить и приготовить слона, ни сделать повязку, ни сделать ожерелье)?

Задача 23. В группе из 50 ребят некоторые знают все буквы, кроме «р», которую просто пропускают при письме, а остальные знают все буквы, кроме «к», которую тоже пропускают. Однажды учитель попросил 10 учеников написать слово «кот», 18 других учеников — слово «рот», а остальных — слово «крот». При этом слова «кот» и «рот» оказались написанными по 15 раз. Сколько ребят написали свое слово верно? Ответ обоснуйте.

Задача 24. (Льюис Кэрролл) В ожесточенном бою 70 из 100 пиратов потеряли один глаз, 75 — одно ухо, 80 — одну руку и 85 — одну ногу. Каково минимальное число потерявших одновременно глаз, ухо, руку и ногу?

Задача 25. Пусть U — множество из n ($n \geq 3$) элементов.

(a) Найти число пар (X, Y) таких подмножеств множества U, что $X \cap Y = \varnothing$.
(b) Найти число пар (X, Y) таких подмножеств множества U, что $|X \triangle Y| = 1$.
(c) Найти число пар (X, Y) таких подмножеств множества U, что $X \cap Y = \varnothing$, $|X| \geq 2, |Y| \geq 3$.
(d) Найти число пар (X, Y) таких подмножеств множества U, что $|X \triangle Y| = 1$, $|X| \geq 2, |Y| \geq 3$.

Рекомендуем пытаться сделать эти задачи, только если вы уверенно можете решить все задачи из перечисленных выше (готовы сходу рассказать их решения).

Задача 26. Номер автобусного билета состоит из 6 цифр (возможно, совпадающих; номер может начинаться с нуля). Сколько существует билетов, номер которых не содержит единиц, но содержит хотя бы одну двойку?

Задача 27. Сколько способов

(a) Рассадить 5 человек по пятиместной карусели?

(b) Покрасить пятиместную карусель в два цвета?

Задача 28. (*) Сколько «слов» (не обязательно осмысленных) длины 7 в русском языке содержит две буквы «н», идущие подряд?

Задача 29. Даны 15 целых чисел, среди которых нет одинаковых. Петя записал на доску все возможные суммы по 7 из этих чисел, а Вася – все возможные суммы по 8 из этих чисел. Могло ли случиться, что они выписали на доску одни и те же наборы чисел? (Если какое-то число повторяется несколько раз в наборе у Пети, то и у Васи оно должно повторяться столько же раз.)

Задача 30. Сколько существует последовательностей из n открывающих скобок и n закрывающих скобок, в которых в любом начальном фрагменте количество открывающих скобок не меньше, чем количество закрывающих (соблюдён балланс скобок).

Задача 31. На окружности отмечены $2n$ различных точек. Сколькими способами их можно разбить на n пар, соединив непересекающимися отрезками?

Задача 32. Известно, что в кодовом замке исправны только кнопки с номерами 1, 2, 3, а код этого замка трёхзначен и не содержит других цифр. Написать последовательность цифр наименьшей длины, наверняка открывающую этот замок (замок открывается, как только подряд и в правильном порядке нажаты все три цифры его кода).

Задача 33. Вычислить суммы:

a) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$; b) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$; c) $\sum\limits_{k} \binom{n}{2k}$; d) $\sum\limits_{k} \binom{n}{2k+1}$;

e) $\sum\limits_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$; f) $\sum\limits_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{n}{k}$; j*) $4\sum\limits_{k} \binom{n}{4k}$.

Задача 34. (a) Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся ни на одно из чисел 3, 5 и 7.

(b) Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся ни на одно из чисел 6, 10, 15.

(c) Найти число простых чисел, не превосходящих 100.

Задача 35. Сколькими способами из множества первых n натуральных чисел можно выбрать подмножество мощности k так, чтобы в подмножество не входили соседние числа?

Задача 36. Сколькими способами из множества первых n натуральных чисел можно выбрать подмножество мощности k так, чтобы в подмножество не входили соседние числа, считая при этом, что числа 1 и n — тоже соседние?

Задача 37. Сколькими способами король Артур может рассадить 5 пар враждующих рыцарей за круглым столом так, чтобы ни одна пара враждующих рыцарей не сидела рядом?

Задача 38. Сколькими способами можно расположить за столом шесть супружеских пар так, чтобы мужчины и женщины чередовались и никакие двое супругов не сидели рядом?

Задача 39. Пусть $N(r)$ — количество предметов, обладающих ровно r свойствами, $N_{\geq r}$ — количество предметов, обладающих не менее чем r свойствами. Докажите равенства

$$N(r) = \sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} S_k,$$

$$N_{\geq r} = \sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} \binom{k-1}{r-1} S_k.$$

Задача 40. Какие строки в треугольнике Паскаля состоят только из нечетных чисел?