

Вычислительные социальные науки, 2024-25 уч. год**Дискретная математика****Графы-1 (6 апреля 2025 г.)***В. В. Кочергин, А. В. Михайлович*

Задача 1. Доказать, что следующие утверждения эквивалентны

1. Граф G является деревом.
2. В графе G любые две вершины соединены единственной цепью.
3. Граф G связен и число ребер на единицу меньше числа вершин.
4. Граф G связен, но при удалении любого ребра перестает быть связным.
5. Граф G не содержит циклов, но при добавлении любого ребра образуется цикл.
6. Граф G не содержит циклов и число ребер на единицу меньше числа вершин.

Задача 2. Доказать, что для любого плоского связного графа, содержащего больше одного ребра, выполняется неравенство $2P \geq 3G$.

Задача 3. Доказать, что в любом плоском связном графе содержится вершина, степень которой не больше 5.

Задача 4. Существует ли граф на 8 вершинах, в котором 23 ребра и есть вершина степени 1?

Задача 5. В некоторой стране есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр-названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9, используя эти авиалинии (возможно, с пересадками)?

Задача 6. В графе на 400 вершинах степень каждой вершины равна 201. Докажите, что в этом графе есть цикл длины 3.

Задача 7. Какое максимальное число рёбер может быть в несвязном графе с n вершинами?

Задача 8. В некоторой стране 15 городов, каждый из которых соединён дорогами не менее, чем с 7 другими. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через другие города).

Задача 9. Докажите, что граф или его дополнение связны (возможно оба связны).

Задача 10. Сформулируйте следующее утверждение на языке теории графов и докажите его. На каждой лекции по дискретной математике есть два студента, которые знакомы с одинаковым числом студентов (знакомство считается взаимным).

Задача 11. Найдите все графы-пути (т. е. графы, множество ребер которых образует простой путь) и графы-циклы (т. е. графы, множество ребер которых образует простой цикл), дополнение которых граф-путь или граф-цикл.

Задача 12. Доказать, что дерево — двудольный граф.

Задача 13. Пусть $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ — множество вершин. Сколько существует различных графов на этих вершинах?

Задача 14. Какие из следующих пар графов являются изоморфными и почему?

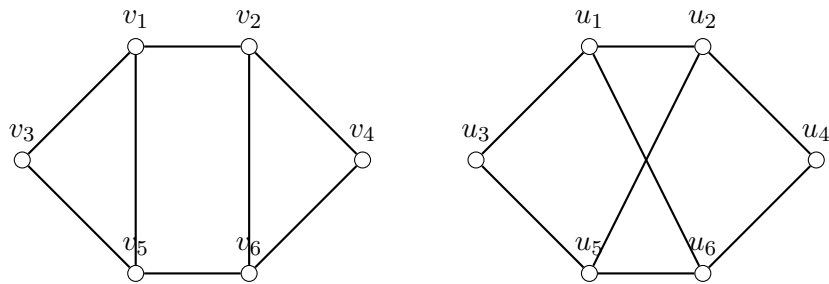


Рис 1.

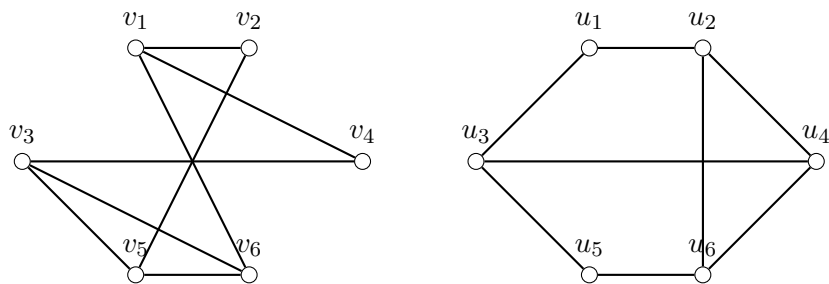


Рис 2.

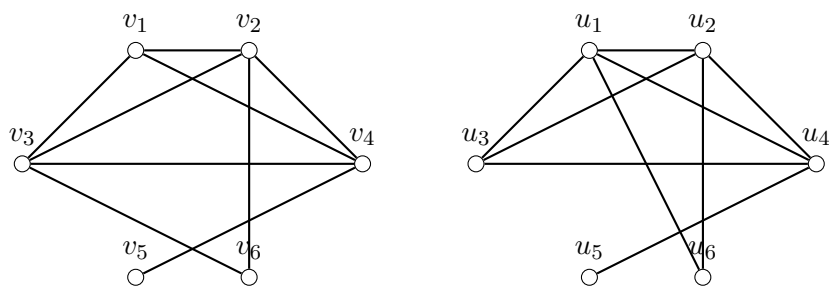


Рис 3.

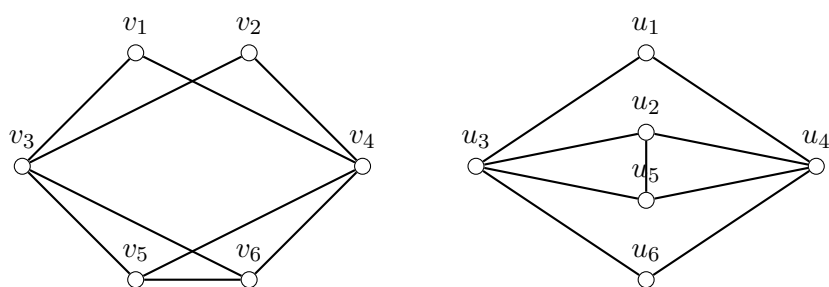


Рис 4.

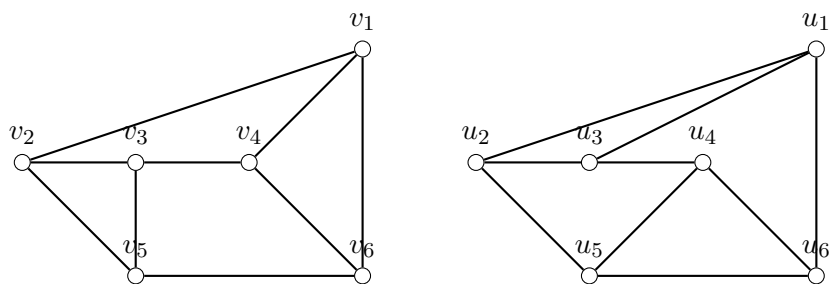


Рис 5.

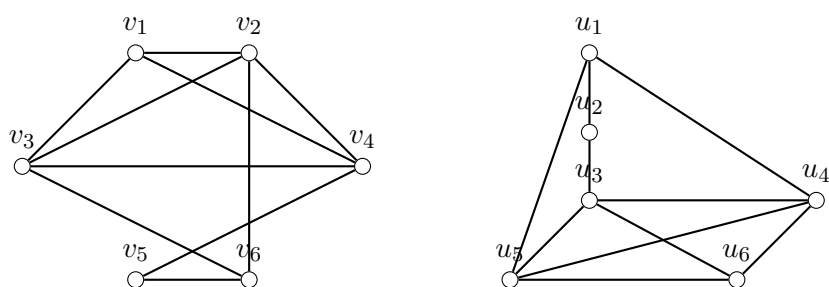


Рис 6.

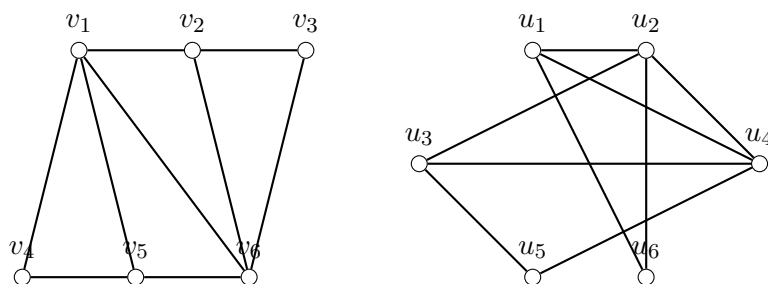


Рис 7.

Задача 15. Изобразить два неизоморфных графов с набором степеней вершин $(1, 1, 2, 2, 3, 3, 4)$.

Задача 16. Найти количество попарно неизоморфных графов с 12 вершинами, в которых степень каждой вершины равна 2.

Задача 17. Найти количество попарно неизоморфных графов с 6 вершинами и 13 рёбрами.

Задача 18. Найти количество попарно неизоморфных графов со следующим набором степеней вершин.

- (a) $(6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7)$;
- (b) $(4, 4, 4, 6, 6, 6, 6)$;
- (c) $(13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 12, 12, 11, 11, 11, 11)$.

Задача 19. Каково наибольшее число точек сочленения в графе с p вершинами?

Задача 20. Доказать, что если v — точка сочленения графа G , то v не является точкой сочленения графа $\overline{G}$ (дополнение графа G).

Задача 21. Связный граф с не менее чем двумя рёбрами является блоком тогда и только тогда, когда два смежных ребра лежат на некотором простом цикле.