

Задачи к семинарам
по курсу «Дискретная математика»
ОП «Вычислительные социальные науки», 1-й курс
2024/25 учебный год, весна
Тема: Комбинаторика: рекуррентные соотношения

Найти общие решения линейных однородных рекуррентных соотношений:

Задача 1. $a_{n+1} + 3a_n = 0$.

Задача 2. $a_{n+2} - 3a_n = 0$.

Задача 3. $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$.

Задача 4. $a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n = 0$.

Задача 5. $a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$.

Задача 6. $a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n = 0$.

Найти a_n по линейным однородным рекуррентным соотношениям и начальным условиям:

Задача 7. $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$; $a_0 = 10$, $a_1 = 16$.

Задача 8. $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 0$; $a_0 = 6$, $a_1 = 6$.

Задача 9. $a_{n+2} - a_n = 0$; $a_0 = 0$, $a_1 = 2$.

Задача 10. $a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n = 0$; $a_0 = 3$, $a_1 = 2$, $a_2 = 12$.

Задача 11. $a_{n+3} - 3a_{n+1} + a_n = 0$; $a_0 = a$, $a_1 = b$, $a_2 = c$.

Решить линейные рекуррентные уравнения:

Задача 12.
$$\begin{cases} x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0, \\ x_0 = 1, \quad x_1 = 2. \end{cases}$$

Задача 13.
$$\begin{cases} x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0, \\ x_0 = 0, \quad x_1 = -1. \end{cases}$$

Задача 14.
$$\begin{cases} x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 1, \\ x_0 = 0, \quad x_1 = 1. \end{cases}$$

Задача 15.
$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2^n, \\ a_1 = a_2 = 1. \end{cases}$$

Задача 16.
$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + n, \\ a_1 = a_2 = 1. \end{cases}$$

Задача 17.
$$\begin{cases} a_n = -2a_{n-1} + 8a_{n-2} + (-2)^n, \\ a_1 = 0, \quad a_2 = 1. \end{cases}$$

Задача 18.
$$\begin{cases} x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = n2^n + n^2, \\ x_0 = 1, \quad x_1 = 1. \end{cases}$$

Решить системы линейных рекуррентных уравнений:

Задача 19.
$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n, \\ b_{n+1} = -a_n + b_n, \end{cases} \quad a_1 = 14, b_1 = -6.$$

Задача 20.
$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n, \\ b_{n+1} = 2b_n + a_n + 2n, \end{cases} \quad a_0 = 0, b_0 = 1.$$

Решить рекуррентные уравнения:

Задача 21.
$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - x_{n+1}x_n, \\ x_0 = 1. \end{cases}$$

Задача 22.
$$\begin{cases} x_{n+2} = \frac{x_{n+1}^3}{x_n^2}, \\ x_0 = 1, \quad x_1 = e. \end{cases}$$

Задача 23 (*). (Для знакомых с комплексными числами.)

$$\begin{cases} x_n - 2x_{n-1} + 5x_{n-2} - 10x_{n-3} + 4x_{n-4} - 8x_{n-5} = 0, \\ x_0 = 1, \quad x_1 = -4, \quad x_2 = -12, \quad x_3 = -6, \quad x_4 = 16. \end{cases}$$

Ответ: $x_n = i^{n+1} + (-i)^{n+1} + (2i)^n + (-2i)^n - 2^n$.

Задача 24. Сколькими способами можно замостить прямоугольник высоты 1 и длины 20, используя плитки высоты 1 следующих видов:



Задача 25. Найти число последовательностей длины n из нулей и единиц, в которых каждый блок из единиц имеет четную длину.

Задача 26. Найти число последовательностей длины n над алфавитом $\{0, 1, 2\}$, в которых нет ни двух нулей, ни двух единиц, стоящих подряд.

Задача 27. Найти число последовательностей длины n над алфавитом $\{0, 1, 2, 3\}$, в которых каждый блок из единиц имеет четную длину, а длины блоков из 2 и 3 кратны 3.

Задача 28. Найти количество n -разрядных десятичных чисел, в которых нет двух стоящих рядом четных цифр.

Задача 29. Найти количество n -разрядных десятичных чисел, в которых после цифры 2 не стоит цифра 5.