Школа лингвистики, 2024-25 уч. год
Теория вероятностей
Задачи по непрерывным случайным величинам (18.03.2025)
И. В. Щуров, Д. А. Филимонов, Р. Я. Будылин

1 Различные непрерывные случайные величины

Задача 1. Время (в секундах) между двумя случайными событиями распределено по показательному закону с параметром $\lambda = 0.5$.

(a) Найти вероятность, что между событиями пройдёт не более 3 секунд; не более 5 секунд;
(b) найти вероятность, что между событиями пройдёт от 1 до 3 секунд; от 3 до 5 секунд;
(c) найти вероятность, что между событиями пройдёт более 1 секунды; более 3 секунд;
(d) найти среднее время между двумя событиями;
(e) найти дисперсию и стандартное отклонение времени между событиями.

Задача 2. Случайная величина ξ распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 2$. Другая случайная величина $\eta = 3\xi + 2$.

(a) Запишите функцию распределения $F_\xi(x)$.
(b) Как связаны функции распределения $F_\xi(x)$ и $F_\eta(x)$? Выпишите $F_\eta(x)$, пользуясь определением для функции распределения.
(c) Найти вероятность $P(\eta \leqslant 5)$;
(d) найти вероятность $P(\eta \leqslant -10)$;
(e) найти вероятность $P(3 < \eta \leqslant 5)$;
(f) найти вероятность $P(\eta > 3)$.
(g) Выпишите плотности распределения случайных величин ξ и η. Правда ли, что случайная величина η распределена по показательному закону?

Задача 3. Случайная величина ξ распределена по нормальному закону с параметрами $\mu = 1$ и $\sigma = 2$.

(a) найти вероятность $P(\xi \leqslant 2)$;
(b) найти вероятность $P(\xi \leqslant -1)$;
(c) найти вероятность $P(\xi \leqslant -10)$;
(d) найти вероятность $P(-1 < \xi \leqslant 2)$;
(e) найти вероятность $P(2 < \xi \leqslant 3)$;
(f) найти вероятность $P(\xi > 2)$;
(g) найти вероятность $P(\xi > -1)$.

Задача 4. Случайная величина ξ распределена по нормальному закону с параметрами $\mu = 0$ и $\sigma = 1$. Другая случайная величина $\eta = 2\xi + 3$.

(a) Чему равны $E(\eta)$, $D(\eta)$ и $\sigma(\eta)$?
(b) Как связаны функции распределения $F_\xi(x)$ и $F_\eta(x)$? Как они связаны с функцией Лапласа? Можно ли указать тип распределения для η?
(c) Найти вероятность $P(\eta \leqslant 2)$;
(d) найти вероятность $P(\eta \leqslant -10)$;
(e) найти вероятность $P(-1 < \eta \leqslant 2)$;
(f) найти вероятность $P(\eta > 2)$.

(g) (*) Вычислите плотность распределения случайной величины η, дифференцируя найденную в пункте b) функцию распределения.

Задача 5. Случайные независимые величины ξ и η распределены по нормальному закону с параметрами $\mu_1 = 1$, $\sigma_1 = 2$ и $\mu_2 = -1$, $\sigma_2 = 3$ соответственно.

(a) найти $E(\xi+\eta)$, $D(\xi+\eta)$ и $\sigma(\xi+\eta)$;
(b) найти $E(\xi-\eta)$, $D(\xi-\eta)$ и $\sigma(\xi-\eta)$;
(c) можно ли указать тип распределения для случайных величин $\xi+\eta$ и $\xi-\eta$?
(d) найти вероятность $P(\xi+\eta \leqslant 2)$;
(e) найти вероятность $P(\xi-\eta \leqslant 2)$;
(f) найти вероятность $P(-1 < \xi+\eta \leqslant 2)$;
(g) найти вероятность $P(-1 < \xi-\eta \leqslant 2)$.

2 Формула Муавра-Лапласа

Задача 6. Производится серия из 5 независимых одинаковых экспериментов. Вероятность удачи в одном эксперименте равна $p = 0.6$. Какова вероятность, что количество удач будет

(a) ровно 2?
(b) ровно 3?
(c) от 1 до 3 включительно?

Задача 7. Производится серия из 2400 независимых одинаковых экспериментов. Вероятность удачи в одном эксперименте равна $p = 0.6$. Какова вероятность, что количество удач будет

(a) ровно 1400?
(b) ровно 1500?
(c) от 1000 до 1400 включительно?
(d) от 1400 до 1500 включительно?

Дополнительные задачи

Задача 8. Пусть ξ и η независимы и распределены по закону Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно. Доказать, что $\zeta = \xi + \eta$ распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda_1 + \lambda_2$.