

Школа лингвистики, 2024-25 уч. год

Теория вероятностей

Классическое определение вероятности, условная вероятность и независимость событий: напоминание (14.01.2025)

И. В. Щуров, Д. А. Филимонов, Р. Я. Будылин

События и элементарные исходы

Задача 1. Рассмотрим следующее случайное испытание: монетка подкидывается четыре раза. Нас интересует, какой стороной вверх она падала — орлом или решкой. Интересна и последовательность выпадений, т. е. выпадение сначала орла, потом решки мы отличаем от выпадения сначала решки, а потом орла. Какой будет система элементарных исходов? Какие из следующих происшествий являются событиями в этой системе исходов? Для тех происшествий, которые являются событиями, перечислить, какие элементарные исходы им благоприятствуют.

- (a) В первый раз выпал орёл.
- (b) Во второй раз выпала решка.
- (c) В первый раз выпал орёл, а во второй раз выпала решка.
- (d) В первый раз выпал орёл, а после третьего бросания монетка погнулась.
- (e) Все четыре раза монетка выпала одной и той же стороной.
- (f) В первый раз выпало не то, что в четвёртый, а во второй — не то, что в третий.
- (g) Монетка зависла в воздухе на четвёртое бросание.

Задача 2. В условиях задачи 1 определим события A и B . Перечислить элементарные исходы, благоприятствующие событиям A , B , $A \cap B$, $A \cup B$:

- (a) A — «выпала хотя бы одна решка», B — «выпало ровно пять орлов»
- (b) A — «при первом бросании выпал орёл», B — «при втором бросании выпала решка»
- (c) A — «выпал хотя бы один орёл», B — «выпало ровно три решки»
- (d) A — «выпало меньше двух орлов», B — «орлов выпало больше, чем решек».

Задача 3. Стандартный игральный кубик подкинули два раза. Нас интересует, сколько очков выпадало на кубике. Интересна и последовательность выпадений, т. е. выпадение сначала шестёрки, потом единички мы отличаем от выпадения сначала единички, а потом шестёрки. Пусть событие A — «в первый раз выпало пять очков», событие B — «хотя бы раз выпадало чётное количество очков». Опишите элементарные исходы, удовлетворяющие

- (a) событию $A \cap B$ (оба события произошли)
- (b) событию $A \cup B$ (произошло хотя бы одно из событий).

Классическое определение вероятности

Задача 4. Найти вероятности всех событий, фигурировавших в предыдущих задачах.

Комбинаторика и вероятность

Задача 5. Буквы П, Р, Б, Л, М, О, Е, А написаны на отдельных карточках. Ребёнок берёт карточки в случайном порядке и прикладывает одну к другой.

- (а) Если ребёнок берёт 3 карточки, какова вероятность, что получится слово «ЛОБ»?
- (б) Если ребёнок берёт все 8 карточек, какова вероятность, что получится слово «ПРОБЛЕМА»?

Задача 6. На столе лежат три карточки с буквой «О», две карточки с буквой «К» и одна карточка с буквой «Ш». Какова вероятность, что ребёнок из предыдущей задачи соберёт из них слово «ОКОШКО»?

Теорема сложения вероятностей

Задача 7. Монетку подбросили четыре раза. Событие A — «выпало не меньше трёх орлов», событие B — «выпала хотя бы одна решка».

- (а) Перечислить элементарные исходы, благоприятные событию A , и найти его вероятность.
- (б) Перечислить элементарные исходы, благоприятные событию B , и найти его вероятность.
- (с) Перечислить элементарные исходы, благоприятные событию $A \cap B$ (оба события A и B выполняются), и найти его вероятность.
- (d) Вычислить вероятность $A \cup B$ (выполняется хотя бы одно из событий A и B) с помощью теоремы сложения.
- (е) Перечислить элементарные исходы, благоприятные событию $A \cup B$, и сверить результат с предыдущим пунктом.

Задача 8. В колоде 36 карт. Случайным образом выбирают одну карту. Событие A — «выбрали туза», событие B — «выбрали пиковую карту».

- (а) Найти вероятности событий A и B .
- (б) Какие элементарные исходы благоприятны событию $A \cap B$? Найти вероятность этого события.
- (с) Вычислить вероятность $A \cup B$ с помощью теоремы сложения.
- (d) Перечислить элементарные исходы, благоприятные событию $A \cup B$, и сверить результат с предыдущим пунктом.

Условная вероятность

Определение 1. Условной вероятностью $P(A|B)$ события A при условии B называется отношение вероятности пересечения $A \cap B$ к вероятности события B :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Если все элементарные исходы равновероятны, то эта вероятность равна отношению количества исходов, благоприятных обоим событиям, к количеству исходов, благоприятных событию B :

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}.$$

Задача 9. Игральный кубик подбросили два раза. Событие A — выпадение в первый раз четвёрки, событие B — выпадение восьми очков в сумме за два раза.

- (a) Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию A .
- (b) Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию B .
- (c) Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию $A \cap B$.
- (d) Найдите вероятность события $A \cap B$.
- (e) Найдите вероятность события A при условии B .

Задача 10. Монетку подбросили четыре раза. Событие A — выпадение орла в четвёртый раз, событие B — выпадение трёх орлов в первые три подбрасывания.

- (a) Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию A .
- (b) Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию B .
- (c) Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию $A \cap B$.
- (d) Найдите вероятность события $A \cap B$.
- (e) Найдите вероятность события A при условии B .

(Не)зависимость событий

Теорема (Теорема умножения вероятностей). *Вероятность пересечения событий равна произведению условной вероятности на вероятность условия:*

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

Определение 2. События A и B называются *независимыми*, если вероятность каждого из них не зависит от того, произошло другое событие или нет, то есть вероятность события A равна вероятности события A при условии B , а вероятность события B равна вероятности события B при условии A :

$$P(A|B) = P(A), P(B|A) = P(B) \text{ для независимых событий } A \text{ и } B.$$

Это определение можно переписать в симметричной форме:

$$\text{События } A \text{ и } B \text{ независимы, если и только если } P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Задача 11. Известно, что среди владеющих английским языком знающие испанский встречаются в 2 раза чаще, чем среди людей в целом. Являются ли независимыми события A — «случайно взятый человек знает английский» и B — «случайно взятый человек знает испанский»?

Задача 12. В Тилимилитрамдии хотя бы какой-то иностранный язык знает 20% населения. В столице этот показатель равен 35%. Являются ли события «этот человек знает иностранный язык» и «этот человек живёт в столице» независимыми?

Задача 13. Монетку подкинули 3 раза. Событие A — «в первый раз выпал орёл», событие B — «орёл выпал два раза».

- (a) Найти вероятность события A .
- (b) Найти вероятность события B .
- (c) Найти вероятность $P(A \cap B)$.

(d) Являются ли события A и B независимыми?

Задача 14. Кубик брошен один раз. Являются ли события A и B независимыми, если событие A — «выпало чётное число», а

(a) событие B — «выпало число, большее 2»?

(b) событие B — «выпало число, большее 3»?

(c) событие B — «выпало число, большее 4»?

Задача 15. Вероятность выиграть джекпот в лотерее равна 0,001%. Пусть в эту лотерею сыграло 100 000 игроков. С какой вероятностью кто-нибудь из них выиграл джекпот? А если бы в лотерею сыграл миллион игроков?

В этой задаче можно (и даже нужно!) использовать технику для вычисления — калькулятор, компьютер, — а также приблизительные оценки.