

Школа лингвистики, 2024-25 уч. год

Линейная алгебра и математический анализ

Лекция 8. Интегрирование по частям. Определённый интеграл. Несобственный интеграл. (22.10.2024)

Д.А. Филимонов

КРАТКИЙ КОНСПЕКТ

Интегрирование по частям

Формула производной произведения: $(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow uv' = (uv)' - u'v$

Проинтегрируем и вспомним, что $\int f'(x) dx = f(x) + C$:

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x)v(x) dx$$

Константу не пишем, потому что в обеих частях равенства есть знак интеграла. Более короткая запись:

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx$$

Это *формула интегрирования по частям*.

Иногда в литературе можно встретить другую формулу. Вспомним, что $d(f(x)) = f'(x) dx$. Значит $v' dx = dv$, а $u' dx = du$: $\int u dv = uv - \int v du$. Однако, эта форма неудобна при решении задач.

Составим таблицу функций u и v так, что функции $u(x)$ при дифференцировании упрощаются, а функции $v(x)$ не ухудшаются:

$u(x)$ <i>удобно дифференцировать</i>	$v(x)$ <i>удобно интегрировать</i>
x^n	e^x
$\ln x$	$\sin x$
$\arcsin x$	$\cos x$
$\operatorname{arctg} x$	x^n
$\sin x$	
$\cos x$	
e^x	

Примеры

$$\int x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \\ v' = \sin x \\ u' = 1 \\ v = (-\cos x) \end{array} \right| = x \cdot (-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x) dx = -x \cos x + \int \cos x dx =$$

$$= -x \cos x + \sin x + C$$

$$\int \ln x \, dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} \\ v = x \end{array} \right| = x \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} x \, dx = x \cdot \ln x - \int 1 \, dx = x \cdot \ln x - x + C$$

$$\begin{aligned} \int e^x \cos x \, dx &= \left| \begin{array}{l} u = \cos x \\ v' = e^x \\ u' = -\sin x \\ v = e^x \end{array} \right| = \cos x \cdot e^x - \int (-\sin x) \cdot e^x \, dx = \left[\begin{array}{l} u = -\sin x \\ v' = e^x \\ u' = \cos x \\ v = e^x \end{array} \right] = \\ &= \cos x \cdot e^x + (-\sin x \cdot e^x - \underbrace{\int (\cos x) \cdot e^x \, dx}_{\text{изначальный интеграл}}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \int (\cos x) \cdot e^x \, dx = \cos x \cdot e^x - \sin x \cdot e^x \Rightarrow \int (\cos x) \cdot e^x \, dx = \frac{\cos x \cdot e^x - \sin x \cdot e^x}{2}$$

Определенный интеграл

Формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a),$$

где $F'(x) = f(x)$

Обозначение $F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$. Читается как "в подстановке от a до b ".

Свойство:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Пример: найти площадь под полуволной графика синуса

$$S = \int_0^\pi \sin x \, dx = (-\cos x) \Big|_0^\pi = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$$

Несобственные интегралы

$$\int_a^{+\infty} f(x) \, dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \, dx$$

Примеры:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^3} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\left(-\frac{1}{2x^2} \right) \Big|_1^b \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(-\frac{1}{2b^2} \right) - \left(-\frac{1}{2} \right) \right) = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\left(-\frac{1}{e^x} \right) \Big|_0^b \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(-\frac{1}{e^b} \right) - \left(-\frac{1}{e^0} \right) \right) = 1$$

Если особенностей две, надо разделить интеграл (a - любое число):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

Иногда интеграл по всей прямой расходится (отдельные интегралы по лучам стремятся к ∞), но если взять единый предел, ответ все же получить можно. Такой способ подсчета называется интеграл в смысле главного значения:

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} f(x) dx$$