

Школа лингвистики, 2024-25 уч. год

Линейная алгебра и математический анализ

Лекция 7. Неопределённый интеграл. Замена переменной. (15.10.2024)

Д.А. Филимонов

КРАТКИЙ КОНСПЕКТ

Интегралы

Определение: если $F'(x) = f(x)$, то

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

$$F(x) \approx \sum f(x_i) \cdot \Delta x \rightarrow \int f(x)dx$$

Свойства:

$$\int f'(x)dx = f(x) + C$$

$$\int c \cdot f(x)dx = c \int f(x) dx$$

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

Таблица:

$$\int 0 dx = C$$

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} \cdot x^{a+1} + C, a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

Пример:

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^5}} + 3^x \right) dx &= \int \frac{2}{\sqrt[3]{x^5}} dx + \int 3^x dx = 2 \int x^{-\frac{5}{3}} dx + \frac{1}{\ln 3} \cdot 3^x = 2 \cdot \frac{1}{-\frac{5}{3}+1} \cdot x^{-\frac{5}{3}+1} + \frac{3^x}{\ln 3} = \\ &= -3 \cdot x^{-\frac{2}{3}} + \frac{3^x}{\ln 3} = -\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{3^x}{\ln 3} \end{aligned}$$

Замена переменной

$$\int \underbrace{f(g(y))}_x \cdot \underbrace{g'(y)dy}_{dx} = \left| \begin{array}{l} x = g(y) \\ dx = d(g(y)) \\ dx = g'(y)dy \end{array} \right| = \int f(x)dx$$

Типы замен

1. Линейная, для $y = ax + b$, работает всегда

$$\int \cos(2x+3)dx = \left| \begin{array}{l} y = 2x+3 \\ dy = d(2x+3) \\ dy = 2dx \\ \frac{dy}{2} = dx \end{array} \right| = \int \cos \cdot \frac{dy}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sin y + C = \frac{\sin(2x+3)}{2} + C$$

2. Тригонометрическая

Интеграл вида $\int \sin^m x \cos^k x dx$, $m, k \in \mathbb{Z}$

Если

m - нечетное $\Rightarrow y = \cos x$

k - нечетное $\Rightarrow y = \sin x$

m, k - четные $\Rightarrow$ используем формулы понижения степени: $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} y = \sin x \\ dy = d(\sin x) \\ dy = \cos x dx \end{array} \right| = \int y^2 dy = \frac{y^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

3. Степенная

Интеграл вида $\int f(x^n) \cdot x^{n-1} dx$, замена $y = x^n$

$$\begin{aligned} \int \cos(2x^3 + 1) \cdot x^2 \, dx &= \left| \begin{array}{l} y = x^3 \\ dy = d(x^3) \\ dy = 3x^2 \, dx \\ \frac{dy}{3} = x^2 \, dx \end{array} \right| = \int \cos(2y + 1) \cdot \frac{dy}{3} = \left| \begin{array}{l} z = 2y + 1 \\ dz = d(2y + 1) \\ dz = 2dy \\ \frac{dz}{2} = dy \end{array} \right| = \\ &= \int \cos z \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{dz}{2} = \frac{1}{6} \int \cos z \, dz = \frac{1}{6} \sin z + C = \frac{1}{6} \sin(2x^3 + 1) + C \end{aligned}$$

Иногда можно проще:

$$\int \cos(2x^3 + 1) \cdot x^2 \, dx = \left| \begin{array}{l} z = 2x^3 + 1 \\ dz = d(2x^3 + 1) \\ dz = 2 \cdot 3x^2 \, dx \\ \frac{dz}{6} = x^2 \, dx \end{array} \right| = \int \cos z \cdot \frac{dz}{6} = \frac{1}{6} \sin z + C = \frac{1}{6} \sin(2x^3 + 1) + C$$

4. Логарифмическая

Интеграл вида $\int f(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \, dx$, замена $y = \ln x$

$$\int \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)} \, dx = \left| \begin{array}{l} y = \ln x \\ dy = \frac{1}{x} \, dx \end{array} \right| = \int \frac{dy}{1 + y^2} = \operatorname{arctg} y + C = \operatorname{arctg}(1 + \ln x) + C$$

Интегрирование по частям

Формула производной произведения: $(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow uv' = (uv)' - u'v$

Проинтегрируем и вспомним, что $\int f'(x) \, dx = f(x) + C$:

$$\int u(x)v'(x) \, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x)v(x) \, dx$$

Константу не пишем, потому что в обеих частях равенства есть знак интеграла. Более короткая запись:

$$\int uv' \, dx = uv - \int u'v \, dx$$

Это *формула интегрирования по частям*.

Иногда в литературе можно встретить другую формулу. Вспомним, что $d(f(x)) = f'(x) \, dx$. Значит $v' \, dx = dv$, а $u' \, dx = du$: $\int u \, dv = uv - \int v \, du$. Однако, эта форма неудобна при решении задач.

Составим таблицу функций u и v так, что функции $u(x)$ при дифференцировании упрощаются, а функции $v(x)$ не ухудшаются:

$u(x)$ <i>удобно дифференцировать</i>	$v(x)$ <i>удобно интегрировать</i>
x^n	e^x
$\ln x$	$\sin x$
$\arcsin x$	$\cos x$
$\operatorname{arctg} x$	x^n
$\sin x$	
$\cos x$	
e^x	

Примеры

$$\int x \sin x \, dx = \left| \begin{array}{l} u = x \\ v' = \sin x \\ u' = 1 \\ v = (-\cos x) \end{array} \right| = x \cdot (-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x) \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx =$$

$$= -x \cos x + \sin x + C$$

$$\int \ln x \, dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} \\ v = x \end{array} \right| = x \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} x \, dx = x \cdot \ln x - \int 1 \, dx = x \cdot \ln x - x + C$$

$$\int e^x \cos x \, dx = \left| \begin{array}{l} u = \cos x \\ v' = e^x \\ u' = -\sin x \\ v = e^x \end{array} \right| = \cos x \cdot e^x - \int (-\sin x) \cdot e^x \, dx = \left[\begin{array}{l} u = -\sin x \\ v' = e^x \\ u' = \cos x \\ v = e^x \end{array} \right] =$$

$$= \cos x \cdot e^x + (-\sin x \cdot e^x - \underbrace{\int (\cos x) \cdot e^x \, dx}_{\text{изначальный интеграл}})$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \int (\cos x) \cdot e^x \, dx = \cos x \cdot e^x - \sin x \cdot e^x \Rightarrow \int (\cos x) \cdot e^x \, dx = \frac{\cos x \cdot e^x - \sin x \cdot e^x}{2}$$