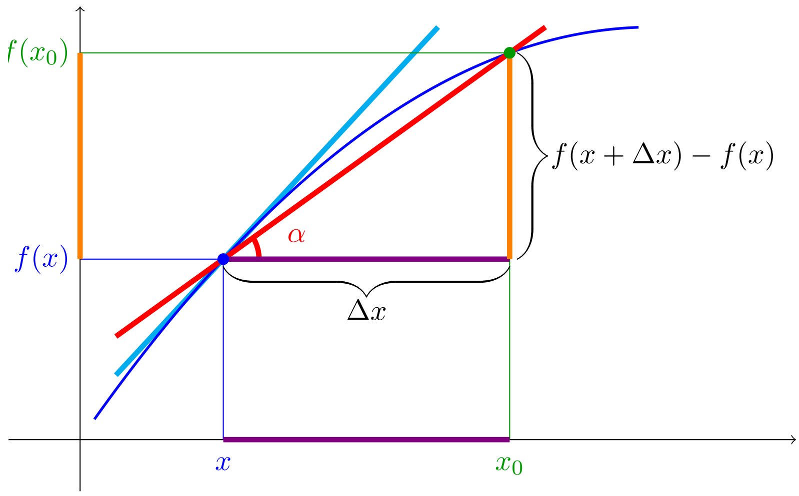
Школа лингвистики, 2024-25 уч. год
Линейная алгебра и математический анализ
Лекция 6. Производные. Правило Лопиталя. (08.10.2024)
Д.А. Филимонов

1 Определение производной.

Часто бывает так, что нас интересует не только закон изменения какой-то величины, то есть сама функция, но и *скорость* изменения величины. В школе на уроках физики (да и математики) обычно говорят про поездки автобусов между городами. В этом случае скорость изменения расстояния это и будет обычная скорость движения. Однако в реальной жизни гораздо чаще получается так, что нас, например, может интересовать скорость изменения рейтинга политика. Мы сможем наложить ее на даты его выступлений и узнать, что лучше влияет на узнаваемость и одобрение. Или нас может интересовать динамика развития страны — в этом случае стоит изучить скорость роста ВВП. Правда, обычно, вместо «скорости роста ВВП» говорят про «темпы роста ВВП», но это лишь вопрос терминологии.

Итак, возникает вопрос, как, зная функцию величины, описать ее скорость изменения. Сама эта скорость не будет постоянной и тоже может изменяться в зависимости от времени. Для начала, упростим задачу и будем рассматривать *среднюю* скорость изменения на участке от x до $x + \Delta x$. Сама величина изменяется, соответственно, от $f(x)$ до $f(x + \Delta x)$. В этом случае средняя скорость изменения величины это отношение изменения величины к изменения аргумента: $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.



На рисунке график функции $f(x)$ изображён синим цветом, отрезок соответствующий разности значений функции в точках x и x_0 — оранжевым, а отрезок, отвечающий изменению аргумента — фиолетовым. Красная прямая называется *секущей*. Как можно видеть из картинки, численно средняя скорость равна тангенсу угла наклона секущей:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Теперь надо разобраться, как же вычислить не среднюю, а *мгновенную* скорость. Для этого надо чтобы точка x_0 была как можно ближе к точке x. Если начать ее приближать, треугольничек будет становиться все меньше, а в конце красная секущая превратится в голубую *касательную* к графику нашей функции. При этом, поскольку ранее средняя скорость была равна тангенсу угла наклона секущей, то и для мгновенной скорости логично в качестве значения брать тангенс угла наклона, но уже касательной. С точки формальной точки зрения бесконечное уменьшение — это предел при $\Delta x \to 0$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Мы рассмотрели геометрическую интерпретацию мгновенной скорости изменения величины в точке и способ ее вычисления в одной точке. Теперь можно вычислить ее так в каждой точке и получить новую функцию - зависимость скорости изменения $f(x)$ от x. Эта новая функция обозначается $f'(x)$ и называется *производной* функции $f(x)$. Процесс получения производной называется *дифференцированием.*

Как видно, производные элементарных функций, а также свойства дифференцирования можно получить из соответствующих свойств пределов. В нашем курсе мы опускаем все эти детали и пользуемся уже готовыми результатами. Для начала, обсудим свойства производных.

2 Свойства производной.

Свойства производной относительно вынесения множителя, сложения и вычитания такие же как и для пределов:

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

А вот для произведения и для отношения функций свойства производных не такие очевидные:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

3 Производные элементарных функций.

Для того, чтобы вычислить производную любой функции, заданной формулой, необходимо уметь вычислять производные элементарных функций. Все эти производные можно посчитать по определению, мы же сразу запишем таблицу производных, которой будем пользоваться дальше.

$$(C)' = 0;$$

$$(x^a)' = ax^{a-1},\ a \neq 0;$$

$$(a^x)' = a^x \ln a, \text{ в частности, } (e^x)' = e^x;$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \text{ в частности, } (\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$$(\sin x)' = \cos x;$$

$$(\cos x)' = -\sin x;$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$$

Некоторые из этих примеров избыточны, например производную тангенса можно вычислить зная производные синуса и косинуса и используя свойство производной отношения, однако в таблицу собраны все элементарные функции, которые мы обсуждали на четвёртой лекции.

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Пользуясь таблицей и свойствами можно вычислять производные для многих функция.

Пример 1.

$$(2\cos x - 3\sqrt{x})' = (2\cos x)' - (3\sqrt{x})' = 2(\cos x)' - (3x^{\frac{1}{2}})' = -3\sin x - 3 \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = -3\sin x - \frac{3}{2\sqrt{x}}$$

4 Производная сложной функции.

До этого момента мы научились считать производные для всех функций, заданных формулой, кроме одного действия — действия композиции, оно же действие подстановки одной функции в другую (иногда ее называют сложной функцией). Для этого действия тоже есть правило для вычисления производной:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

В этой формуле важно, что сперва в производную внешней функции $f(x)$ подставляется в качестве аргумента вся функция $g(x)$, а затем полученное выражение умножается на производную функции $g(x)$. В примерах ниже цветом отмечены внешние и внутренние функции. Иногда формулу приходится использовать несколько раз, если функци g(x) сама по себе оказывается сложной функцией.

Пример 2.

$$(\cos(3x))' = -\sin(3x) \cdot (3x)' = -3\sin(3x)$$

Здесь $f(x) = \cos(x)$ и $g(x) = 3x$.

Пример 3.

$$\left(2^{x^2}\right) = \left(2^{(x^2)}\right)' = 2^{x^2} \cdot \ln 2 \cdot (x^2)' = 2^{x^2} \cdot \ln 2 \cdot 2x$$

Здесь $f(x) = 2^x$ и $g(x) = x^2$.

Пример 4.

$$\left(\frac{1}{\sin(\sqrt[3]{x})}\right)' = \left((\sin(\sqrt[3]{x}))^{-1}\right)' = -\left(\sin(\sqrt[3]{x})\right)^{-2} \cdot (\sin(\sqrt[3]{x}))' = -\frac{\cos(\sqrt[3]{x}) \cdot ((x)^{\frac{1}{3}})'}{\sin^2(\sqrt[3]{x})} =$$

$$= -\frac{\cos(\sqrt[3]{x}) \cdot \frac{1}{3} \cdot (x)^{-\frac{2}{3}}}{\sin^2(\sqrt[3]{x})} = -\frac{\cos(\sqrt[3]{x})}{3\sin^2(\sqrt[3]{x}) \cdot \sqrt[3]{x^2}}$$

Здесь вложение тройное, $f(g(h(x)))$, где $f(x) = (x)^{-1}$, $g(x) = \sin(x)$ и $h(x) = \sqrt[3]{x}$.

5 Старшие производные.

Раз производной от функции снова является функция, ничто не мешает нам брать производную от производной. В таком случае получается вторая производная от исходной функции. Аналогично можно рассматривать третью, четвертую или любую другую, как говорят, производную *старшего порядка.*

Производные высокого порядка обозначаются либо римскими цифрами, либо арабскими, но в скобочках, чтобы отличать их от степени. Например, производная 6 порядка будет обозначаться как $f^{VI}(x)$, или $f^{(6)}(x)$.

Пример 5.

$$(x^3)'' = (3x^2)' = 3 \cdot 2x = 6x$$

На практике производные выше второй встречаются довольно редко, обычно в задачах точного приближения. Однако вторая производная встречается довольно часто. Вспомним, что сама по себе производная это мгновенная скорость изменения величины. В таком случае, вторая производная — это скорость изменения скорости, то есть ускорение. Это физическая интерпретация. Аналогичное понятие есть в экономике. Например, рассмотрим валовый внутренний продукт. Как мы уже вспоминали, обычно, про ВВП не говорят «скорость изменения ВВП», пишут «темпы роста ВВП». Но сами темпы роста не отражают динамики развития страны. Для того, чтобы можно было говорить про быстро развивающуюся экономику, важно, чтобы темпы роста ВВП увеличивались. Значит мы говорим уже о скорости темпов роста, то есть о второй производной.

6 Частные производные.

Часто бывает так, что функция зависит не от одной переменной, а от нескольких. Например маржинальность фирмы может зависеть и от объемов продаж, и от складских мощностей, и от множества других параметров. При этом можно ставить вопрос о скорости изменения величины в зависимости от каждой из переменных. В таком случае мы считаем, что все остальные переменные (кроме интересующей нас) являются постоянными, а производную для вычисления скорости изменения мы будем брать по одной конкретной. Чтобы различать производные по разным переменным, интересующую нас переменную пишут в качестве нижнего индекса.

Пример 6. Вычислим частные производные по x и по y от функции $f(x, y, z) = x \cdot 2^{yz}$.

$$(x \cdot 2^{yz})'_x = 2^{yz} \cdot (x)'_x = 2^{yz}$$

В этом вычислении мы вынесли 2^{yz} за знак дифференцирования, поскольку этот сомножитель не зависит от x.

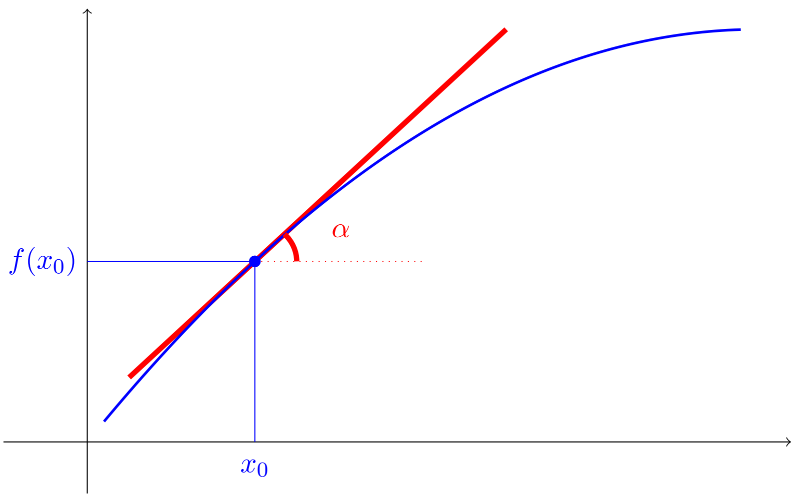
$$(x \cdot 2^{yz})'_y = x \cdot (2^{yz})'_y = x \cdot 2^{yz} \cdot (yz)'_y = x \cdot 2^{yz} \cdot z \cdot (y)'_y = xz2^{yz}$$

Здесь мы вновь вынесли за знак дифференцирования не зависящий от y множитель, однако далее пришлось воспользоваться формулой для производной сложной функции.

7 Применение производной.

7.1 Касательная и приближение линейной функцией.

Вспомним, с чего мы начинали. Геометрически производная функции в каждой точке равна тангенсу угла наклона касательной к графику. С другой стороны, можно вспомнить, что тангенс угла наклона прямой это в точности угловой коэффициент в уравнение прямой вида $y = kx + b$. Это даёт возможность записать уравнение касательной к графику в точке x_0. Действительно, эта прямая должна проходить через точку с координатами $(x_0; f(x_0))$ и иметь угловой коэффициент $k = f'(x_0)$.



После несложных преобразований можно прийти к следующему виду уравнения касательной:

$$y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

Иногда это же уравнение записывают в следующем виде:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Конечно, возможность записать уравнение касательной выглядит полезным математическим упражнением, но в чем практический смысл от решения этой геометрической задачи? Дело в том, что прямая линия это самая простая функция (ее называют *линейной функцией*). И, как можно видеть из рисунка, касательная — это прямая, которая наилучшим образом *приближает* исходную функцию рядом с точкой x_0. Таким образом, уравнение касательной позволяет приближённо считать значения функции недалеко от точки, в которой проведена эта касательная. Все это позволяет сильно ускорять вычисления и делать их сильно проще.

7.2 Правило Лопиталя.

До сих пор при подсчёте пределов в случае неопределенностей нам приходилось либо придумывать какой-то метод (и чем сложнее функция, тем хитрее приходилось искать метод), либо пользоваться первым или вторым замечательным пределом и вытекающими из них эквивалентностями. Однако оказывается, что с помощью производной можно посчитать довольно много пределов, правда, определённого вида.

Теорема 1 (Правило Лопиталя). *Если существуют пределы* $\lim\limits_{x\to A} f(x) = \infty$ *и* $\lim\limits_{x\to A} g(x) = \infty$*, где* A *- число или бесконечность, то*

$$\lim_{x\to A} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to A} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

если последний существует.

То же самое верно, если $\lim\limits_{x\to A} f(x) = \lim\limits_{x\to A} g(x) = 0$

С помощью этой теоремы можно считать практически любые пределы с неопределённостями вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ и $\left[\frac{0}{0}\right]$:

Пример 7.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sin(2x)} \overset{\text{пр. Л.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)'}{(\sin(2x))'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{2\cos(2x)} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

Бывает так, что однократное применение правила Лопиталя не помогает, однако его можно применить ещё раз и тогда получается найти ответ:

Пример 8.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2} \overset{\text{пр. Л.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} \overset{\text{пр. Л.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(2x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

Когда неопределенность имеет другой вид, ее иногда можно привести к тому виду, который подходит для использования правила Лопиталя:

Пример 9.

$$\lim_{x\to 0+}(x\ln)x = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{пр. Л.}}{=} \lim_{x\to 0+}\frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+}(-x) = 0$$