Школа лингвистики, 2024-25 уч. год
Линейная алгебра и математический анализ
Лекция 5. Асимптотическое поведение функций и O-символика (01.10.2024)
Д.А. Филимонов, И.В. Щуров.

1 Скорость роста функций и o-малые на бесконечности

Пусть имеются два алгоритма решения некоторой задачи — например, обработки текста. Скорость работы алгоритма зависит от входных данных — будем считать, что в нашем случае она определяется длиной текста n. Допустим, один алгоритм совершает $100'000n$ операций, а другой — $100n^2$ операций. Какой алгоритм лучше?

Если мы возьмём маленькие n, конечно, $100'000n$ будет больше $100n^2$, и первый алгоритм будет работать дольше. Но если нам предстоит обрабатывать длинные тексты, где n может быть очень велико (больше 1000), второй алгоритм станет работать медленнее: $100n^2 > 100'000n$ при $n > 1000$.

Допустим, мы улучшим второй алгоритм, таким образом, чтобы он работал в 100 раз быстрее: тратил всего n^2 операций. (Или возьмём более мощный компьютер, который работает в 100 раз быстрее, и будем запускать наш алгоритм на нём.) Изменит ли это принципиально ситуацию? Нет, потому что если $n > 10000$, первый алгоритм вновь будет работать быстрее.

Нетрудно видеть, что аналогичный ответ мы получим, какими бы ни были коэффициенты при n и n^2. Дело в том, что при любых фиксированных $C_1,\ C_2 > 0$ для больших n функция C_1n^2 растёт *много быстрее*, чем C_2n. Как можно сформулировать это в более строгих терминах?

Пусть время работы первого алгоритма равно $f(n) = C_1n$, а время работы второго равно $g(n) = C_2n^2$. Можно рассмотреть пределы $f(n)$ и $g(n)$ при $n \to \infty$. Очевидно, что оба предела равны бесконечности (поскольку функции монотонно растут и выбирая достаточно большое n их можно сделать сколь угодно большими):

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = +\infty$$
$$\lim_{n\to\infty} g(n) = +\infty$$

Однако скорость роста у функций разная. Если взять достаточно большое n, можно добиться того, чтобы $g(n)$ было больше, чем $f(n)$ во сколь угодно много раз. Иными словами, отношение $g(n)/f(n)$ можно сделать сколь угодно большим, и, более того, оно стремится к бесконечности:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{C_1n^2}{C_2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{C_1}{C_2}n = +\infty.$$

Когда математик говорит, что функция $g(n)$ растёт *много быстрее*, чем функция $f(n)$, он подразумевает именно это.

Можно рассмотреть обратное отношение $f(n)/g(n)$. По свойству пределов, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \infty,$$

то

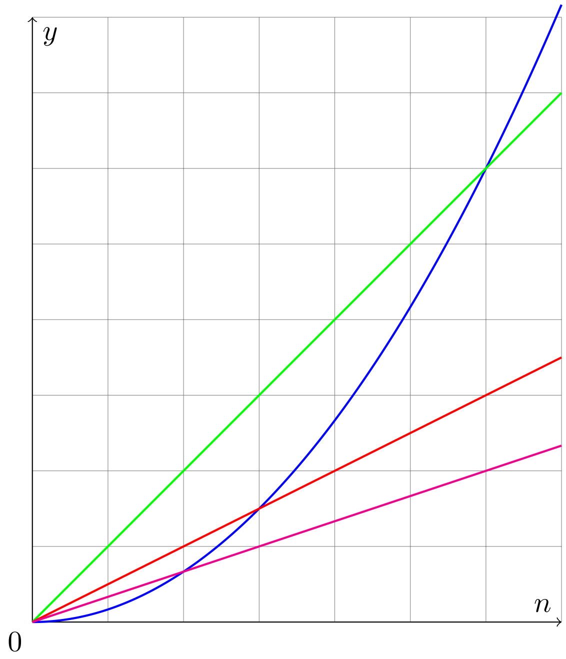

Рис. 1: Функция $y = n^2$ растёт быстрее при $n \to \infty$ чем любая функция вида $y = Cn$, каким бы ни было выбрано C

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \tag{1}$$

Иными словами, если $g(n)$ растёт много быстрее, чем $f(n)$, то $f(n)$ растёт много медленнее, чем $g(n)$.

Определение 1. Если для функция $f(n)$ и $g(n)$ выполняется равенство (1), говорят, что функция $f(n)$ есть o-малое от $g(n)$ при $n \to \infty$. Записывают:

$$f(n) = o(g(n)) \text{ при } n \to \infty.$$

Замечание 1. *В силу особенности письма от руки, размер буквы o часто не сразу ясен (а далее встретится обозначение O). Для того, чтобы отличать большую и маленькую буквы, на письме o-малое обозначают как $\bar{\bar{o}}$.*

Например, $100'000n = o(n^2)$ при $n \to \infty$, поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \frac{100'000n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{100'000}{n} = 0.$$

2 O-большое на бесконечности

Допустим, у нас снова есть два алгоритма обработки текста, и время работы первого описывается функцией $g(n) = 5n$, а время работы второго — функцией $f(n) = 10n + 100$. Очевидно, первый алгоритм работает быстрее. Насколько существенно? Если я пользуюсь вторым алгоритмом, а конкурирующая лаборатория — первым, то я могу просто взять более быстрый компьютер — скажем, работающий в 5 раз быстрее — и получить время работы $f_1(n) = \frac{1}{5}(10n + 100) = 2n + 20$. Если нам приходится обрабатывать длинные тексты, и n велико (в данном случае достаточно, чтобы n было больше 6), то $2n + 20 \leq 5n$, и теперь я буду справляться с задачами быстрее, чем конкуренты. Можно записать это чуть иначе:

$$10n + 100 \leq 5 \times 5n,\ n > 6 \tag{2}$$

или

$$f(n) \leq 5g(n),\ n \to \infty \tag{3}$$

Это означает, что наши алгоритмы работают примерно одинаково быстро — если n достаточно велико, разницу в количестве операций алгоритма можно компенсировать использованием более быстрого компьютера. (Заметьте, в предыдущем разделе никакая разница в скоростях компьютеров не могла компенсировать тот факт, что алгоритм, решающий задачу за $C_1 n^2$ операций, будет для больших n работать дольше, чем тот, который выполняет задачу за $C_2 n$ операций.)

Формально мы могли бы записать, что предел отношения f и g сейчас равен не бесконечности, а какой-то конечной величине:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{10n + 100}{5n} = \lim_{n\to\infty} \frac{10 + 100/n}{5} = 2$$

Тот факт, что предел отношения равен конечной величине, означает, что функции растут «примерно одинаково быстро»: одна быстрее другой в конечное число раз. Этот предел, однако, может не существовать, и чаще пользуются следующим понятием.

Определение 2. Говорят, что функция $f(n)$ есть O-большое от функции $g(n)$ при $n \to \infty$, если найдётся такое $C > 0$ и найдётся такой номер $N > 0$, что для всех $n > N$,

$$|f(n)| \leq C|g(n)|$$

Записывают: $f(n) = O(g(n))$.

Замечание 2. *Для того, чтобы отличать большую и маленькую буквы на письме, O-большое обозначают как $\underline{\underline{O}}$.*

Так, например, выше мы показали (см. (2) и (3)), что $10n + 100 = O(5n)$ при $n \to \infty$.

Замечание 3. *Со знаком «равенства» здесь надо быть аккуратным — это не «настоящее» равенство, это просто условное обозначение, используемое, чтобы сказать, что функция в левой части обладает некоторым свойством. Например, из того факта, что $f_1(n) = O(g(n))$ и $f_2(n) = O(g(n))$ совсем не следует, что $f_1(n) = f_2(n)$.*

Теорема 1. *Если предел отношения $\dfrac{|f(n)|}{|g(n)|}$ при $n \to \infty$ конечен, то $f(n) = O(g(n))$ при $n \to \infty$.*

Зачастую вычислить предел отношения проще, чем доказывать соответствующий факт по определению 2, однако этот предел может и не существовать. Например, $x \sin x = O(x)$ при $x \to \infty$, хотя предела отношения не существует.

3 o-малое и O-большое в конечных точках

Иногда нас интересует поведение функций не на бесконечности, а в окрестности какой-то точки. Например, рассмотрим функции $g(x) = x$, $f(x) = x^2$. При $x \to 0$, они обе стремятся к нулю. Однако, очевидно, что $f(x)$ стремится к нулю «много быстрее», чем $g(x)$.

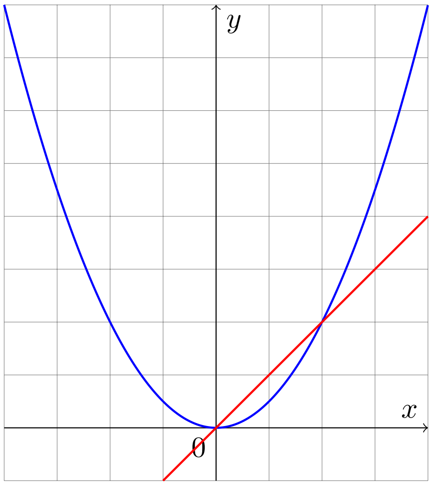

Рис. 2: Функция $y = x^2$ стремится к нулю много быстрее, чем $y = x$ при $x \to 0$

Действительно,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0.$$

Определение 3. Если $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, то говорят, что $f(x) = o(g(x))$ при $x \to a$.

Понятие O-большого в конечной точке определяется по аналогии с определением 2

Определение 4. Говорят, что функция $f(x)$ есть O-большое от функции $g(x)$ при $x \to a$, если найдётся такое $C > 0$, что в некоторой окрестности точки a,

$$|f(x)| \leq C|g(x)|$$

при $x \neq a$. Записывают: $f(x) = O(g(x))$.

Теорема 2. *Если предел отношения* $\dfrac{|f(x)|}{|g(x)|}$ *при* $x \to a$ *конечен, то* $f(x) = O(g(x))$ *при* $x \to a$.

Например, $x + x^2 = O(x)$ при $x \to 0$, поскольку

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + x^2}{x} = \lim_{x\to 0} 1 + x = 1.$$

Иногда необходимо доказать, что какая-то функция, наоборот, не является O-большим или o-малым от другой функции. Для o-малого это легко: достаточно показать, что соответствующий предел не существует или не равен нулю. Для O-большого это несколько труднее: теоремы выше работают только в одну сторону и из того, что предел не существует, ещё не следует, что между функциями нет нужного соотношения. Однако оказывается, что если предел в точности бесконечность (со знаком или беззнаковая), то этого достаточно для отсутствия соотношения.

Теорема 3. *Если предел отношения* $\dfrac{|f(x)|}{|g(x)|}$ *при* $x \to a$, *где* a *- число или бесконечность, стремится к бесконечности (со знаком или беззнаковой), то* $f(x) \neq O(g(x))$ *при* $x \to a$.

4 Действия с о-малыми и О-большими и соотношения между ними

Из определений выше, легко видеть, что если $f(x) = o(g(x))$ (при $x \to A$, где A — бесконечность или число), то, поскольку предел отношения существует и равен нулю, $f(x) = O(g(x))$. Обратное, конечно же, неверно, в чем легко убедиться на примерах, разобранных выше.

Ещё для О-больших и о-малых можно определить арифметические действия, однако свойства оказываются не всегда такими же как для чисел. Все дело в том, что эти понятия обозначают целые классы функций: о-малое это “все функции, которые существенно меньше данной”, а О-большое это “все функции, которые не существенно больше данной”, и все это при стремлении x к бесконечности или какому-то числу. Тем не менее, из определений можно показать, что

1. если $f(x) = o(g(x))$, $g(x) = o(h(x))$, то $f(x) = o(h(x))$;
2. если $f(x) = o(g(x))$ и $h(x) \neq 0$ для всех x, то $f(x)h(x) = o(g(x)h(x))$.

Важно, что все соотношения выполняются при стремлении x к одному и тому же (числу или бесконечности).

Остальные варианты соотношений и действий будут разобраны на семинарах.

5 Эквивалентность бесконечно малых

Определение 5. Если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$, то говорят, что $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to a$. Здесь a может быть и числом и символом $\pm\infty$.

Оказывается, бесконечно малые бывают не только «много меньше» или «одного порядка», но и «практически одинаковые».

Определение 6. Если $f(x)$ и $g(x)$ — бесконечно малые при $x \to a$ и $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, то говорят, что $f(x)$ эквивалентно $g(x)$ (обозначается $f(x) \sim g(x)$) при $x \to a$. Здесь a может быть и числом и символом $\pm\infty$.

Большинство стандартных эквивалентностей (иногда называемых таблица эквивалентностей) берутся из первого и второго замечательных пределов. Если $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to a$, то при $x \to a$

1. $\sin(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$
2. $\mathrm{tg}(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$

3. $\arcsin(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$
4. $\operatorname{arctg}(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$
5. $1 - \cos(\alpha(x)) \sim \dfrac{\alpha(x)^2}{2}$
6. $\mathrm{e}^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$
7. $b^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \ln b$
8. $\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$
9. $\log_b(1 + \alpha(x)) \sim \dfrac{\alpha(x)}{\ln b}$
10. $(1 + \alpha(x))^b - 1 \sim b\alpha(x)$

Знание эквивалентностей позволяет считать пределы, заменяя в произведениях функции на им эквивалентные.

Пример 1. Вычислим предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{\operatorname{arctg}(3x)}$. Заметим, что оба аргумента ($5x$ и $3x$) стремятся к нулю при $x \to 0$ и, кроме того, имеется произведение функций. Значит возможна замена на эквивалентные.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{\operatorname{arctg}(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}$$