Школа лингвистики, 2024-25 уч. год
Линейная алгебра и математический анализ
Производная функции (08.10.2024)

Д. А. Филимонов

Некоторые задачи основаны на книге James Stewart, Calculus Early Transcendentals, 6e

Задача 1. Найти производные следующих функций (без использования формулы производной сложной функции):

(a) $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x}$;

(b) $f(x) = \log_2 x + \arcsin x - 2\mathrm{arctg} x$;

(c) $f(x) = (x-1)^2$;

(d) $f(x) = (x^3 + 2x)e^x$;

(e) $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$;

(f) $f(x) = e^{-x}$;

(g) $f(t) = \frac{2t}{4+t^2}$;

(h) $f(x) = \mathrm{tg}(x) + \mathrm{ctg}(x)$;

(i) $f(x) = \sin(2x)$;

(j) $f(x) = \sin(x + \alpha)$;

Задача 2. Представьте функцию в виде $y = f(g(x))$ (т.е. укажите функции $z = g(x)$ и $y = f(z)$), затем найдите производную с помощью правила дифференцирования сложной функции.

(a) $y = (2x+1)^{2023}$;

(b) $y = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{2023}$;

(c) $y = \sqrt{4+3x}$;

(d) $y = \sqrt{x \sin x}$;

(e) $y = (x^4 + 3x^2 - 2)^5$;

(f) $y = 10^{x^2}$;

(g) $y = e^{\sqrt{x}}$;

(h) $y = \arcsin(\sin x)$;

(i) $y = \ln x^2$.

Задача 3. Вычислите и упростите производные следующих функций.

(a) $y = x \ln x - x$;

(b) $y = \sin^2 x + \cos^2 x$;

(c) $y = -\ln \cos x$;

(d) $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$;

(e) $y = \dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a}$;

(f) $y = \dfrac{1}{2a} \ln \dfrac{x-a}{x+a}$.

Задача 4. Вычислите следующие частные производные.

(a) $\left(\dfrac{x}{y}\right)'_x$;

(b) $\left(\dfrac{x}{y}\right)'_y$;

(c) $\left(\dfrac{x}{y}\right)'_z$;

(d) $\left((a+b-1)^2 + (2a+b-2)^2\right)'_a$;

(e) $\left((a+b-1)^2 + (2a+b-2)^2\right)'_b$;

(f) $(xyz\mathrm{e}^{xyz})'_z$.

Задача 5. Согласно закону Пиотровского-Альтмана, в немецком языке замещение окончания формы глагола второго лица единственного числа {-t} на {-st} подчиняется следующему закону:

$$p(t) = \frac{1}{1 + ae^{-kt}},$$

где $p(t)$ — доля глаголов имеющих во втором лице окончание {-st} в момент времени t, константы a и k положительны.

(a) Найти $\lim_{t\to\infty} p(t)$. Пояснить, что означает полученный ответ.
(b) Найти скорость распространения нового окончания.

Задача 6. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = \dfrac{2}{1+e^{-x}}$ в точке $(0; 1)$.

1 Дополнительные задачи

Задача 7. Найти производные следующих функций:

(a) $f(x) = x^x$;

(b) $f(x) = (2x+1)^{3x-2}$;

(c) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$;

(d) $f(x) = x^{x^x}$;