

Школа лингвистики, 2024-25 уч. год
Линейная алгебра и математический анализ
Предел функции (24.09.2024)

Д. А. Филимонов

Некоторые задачи основаны на книге James Stewart, Calculus Early Transcendentals, 6e.

Задача 1. Найти следующие пределы.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{2x-3} & \text{(c)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^2+2x+2}{x-1} & \text{(e)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2+x-3}{-x^3+2x+1} \\ \text{(b)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-2x+1}{x^2+1} & \text{(d)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3+2x+1}{-x^2+x-3} & \text{(f)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} \end{array}$$

Задача 2. Построить график функции $y = f(x)$.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} f(x) = |x-2| & \text{(c)} f(x) = \begin{cases} x^2-1, & x < 0 \\ x+1 & x \geq 0 \end{cases} \\ \text{(b)} f(x) = \frac{|x|}{x} & \text{(d)} f(x) = \begin{cases} x^2-1, & x \leq 0 \\ \frac{1-x^2}{1-x}, & x > 0 \end{cases} \end{array}$$

Пользуясь построенными графиками, найти пределы $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$.

В пункте 2а найти также $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x)$.

В пункте 2d, найдите также $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$.

Задача 3. Пользуясь известными правилами для арифметических операций, найти следующие пределы.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow -2} (3x^4 + 2x^2 - x + 1) & \text{(d)} \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 3x - 4} & \text{(g)} \lim_{x \rightarrow -4} \frac{1/4 + 1/x}{4+x} \\ \text{(b)} \lim_{x \rightarrow 4-} \sqrt{16-x^2} & \text{(e)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4+h)^2 - 16}{h} & \text{(h)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} \\ \text{(c)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} & \text{(f)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^3 - 8}{h} & \end{array}$$

Задача 4. Найти предел, если он существует. Если не существует, объяснить, почему.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow 3} (2x + |x-3|) & \text{(b)} \lim_{x \rightarrow -6} \frac{2x+12}{|x+6|} & \text{(c)} \lim_{x \rightarrow 0.5-} \frac{2x-1}{|2x^3-x^2|} \end{array}$$

Задача 5. Найдите пределы:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} & \text{(c)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\arcsin 7x} & \text{(e)} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x} \\ \text{(b)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 2x} & \text{(d)} \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} & \text{(f)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+1)}{x+1} \end{array}$$

Дополнительные задачи

Рассмотрим *геометрическую прогрессию* со знаменателем q , то есть последовательность чисел, у которой каждый следующий член получается из предыдущего умножением на q . Если $0 < q < 1$, такая последовательность будет убывать, поскольку каждый следующий член меньше предыдущего (при умножении на число, меньшее 1, числа уменьшаются). Пусть a_n — это n -й член последовательности, $a_1 = c$. Тогда $a_2 = cq$, $a_3 = cq^2$, $a_4 = cq^3$ и т.д. Вообще, $a_n = cq^{n-1}$ (использована степень $(n-1)$, а не n , потому что счёт начался с нуля, первому члену соответствует нулевая степень).

Пусть S_n — сумма первых n членов последовательности, то есть $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$. Например, $S_1 = a_1 = c$, $S_2 = a_1 + a_2 = c + cq$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = c + cq + cq^2$ и т.д.

Задача 6. Доказать, что $S_n = c \frac{1 - q^n}{1 - q}$

Указание. Пусть

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = c + cq + \dots + cq^{n-1} \quad (1)$$

Тогда можно рассмотреть число qS_n , домножив правую часть равенства (1) на q . Получим выражение, которое очень похоже на S_n , и отличается только некоторыми слагаемыми. Исходя из этого, можно записать уравнение на S_n и решить его.

Задача 7. Известно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ если $0 < q < 1$. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, если S_n — сумма первых n членов геометрической прогрессии с первым членом c и знаменателем q .

Задача 8. Постройте график функции:

(a) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \arctg(nx)$

(b) $f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos^{2m}(\pi n! x)) \right)$