Школа лингвистики, 2024-25 уч. год
Дискретная математика для лингвистов
Графы (10 марта 2025 г.)
В. В. Кочергин, А. В. Михайлович

Задача 1. Доказать, что следующие утверждения эквивалентны

1. Граф G является деревом.
2. В графе G любые две вершины соединены единственной цепью.
3. Граф G связен и число ребер на единицу меньше числа вершин.
4. Граф G связен, но при удалении любого ребра перестает быть связным.
5. Граф G не содержит циклов, но при добавлении любого ребра образуется цикл.
6. Граф G не содержит циклов и число ребер на единицу меньше числа вершин.

Задача 2. Доказать, что для любого плоского связного графа, содержащего больше одного ребра, выполняется неравенство $2P \geq 3\text{Г}$.

Задача 3. Доказать, что в любом плоском связном графе содержится вершина, степень которой не больше 5.

Задача 4. Существует ли граф на 8 вершинах, в котором 23 ребра и есть вершина степени 1?

Задача 5. В некоторой стране есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр-названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9, используя эти авиалинии (возможно, с пересадками)?

Задача 6. В графе на 400 вершинах степень каждой вершины равна 201. Докажите, что в этом графе есть цикл длины 3.

Задача 7. Какое максимальное число рёбер может быть в несвязном графе с n вершинами?

Задача 8. В некоторой стране 15 городов, каждый из которых соединён дорогами не менее, чем с 7 другими. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через другие города).

Задача 9. Докажите, что граф или его дополнение связны (возможно оба связны).

Задача 10. Сформулируйте следующее утверждение на языке теории графов и докажите его. На каждой лекции по дискретной математике есть два студента, которые знакомы с одинаковым числом студентов (знакомство считается взаимным).

Задача 11. Найдите все графы-пути (т. е. графы, множество ребер которых образует простой путь) и графы-циклы (т. е. графы, множество ребер которых образует простой цикл), дополнение которых граф-путь или граф-цикл.

Задача 12. Пусть $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ — множество вершин некоторого графа G. Определим на множестве V двуместный предикат $P(x, y)$, который принимает значение «ИСТИНА» тогда и только тогда, когда вершины x и y соединены ребром. Определим на множестве V двуместный предикат $R(x, y)$, который принимает значение «ИСТИНА» тогда и только тогда, когда вершины x и y совпадают.

I. Используя предикаты $P(x, y)$, $R(x, y)$, функции алгебры логики, кванторы всеобщности и существования, запишите следующее (везде расматривается неориентированный граф, в пунктах (a) – (c) допускаются петли и кратные рёбра, в пунктах (d) – (i) граф является простым).

(a) x и y — смежные вершины.
(b) Существует путь длины 2 между вершинами x и y.
(c) Граф G не содежит изолированных вершин.
(d) Степень вершины x равна 2.
(e) Граф G содержит ровно одну вершину степени 1.
(f) Расстояние между вершинами x и y равно 2 (расстояние — минимальное число ребер в пути, у которого x является началом, а y — концом)
(g) Граф G является полным.
(h) Вершины x и y соединены с одними и теми же вершинами.

II. Пусть E — множество неупорядоченных пар различных элементов из V. Сколько элементов содержит множество E?

III. Определим предикат $Q(x, y)$, в котором первый аргумент принадлежит множеству V, а второй — множеству E и который принимает значение «ИСТИНА» тогда и только тогда, когда вершина x инцидентна ребру y. Используя предикат $Q(x, y)$, $R(x, y)$, функции алгебры логики, кванторы всеобщности и существования, выразите предикат $P(x, y)$.

IV. Используя предикаты $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $R(x, y)$, функции алгебры логики, кванторы всеобщности и существования, запишите следующее:

(a) Последовательность $v_{i_0}, e_{i_1}, v_{i_1}, e_{i_2}, v_{i_2}, e_{i_3}, v_{i_3}$ является путём.
(b) Последовательность $v_{i_0}, e_{i_1}, v_{i_1}, e_{i_2}, v_{i_2}, e_{i_3}, v_{i_3}$ является цепью.
(c) Последовательность $v_{i_0}, e_{i_1}, v_{i_1}, e_{i_2}, v_{i_2}, e_{i_3}, v_{i_3}$ является простой цепью.
(d) Последовательность $v_{i_0}, e_{i_1}, v_{i_1}, e_{i_2}, v_{i_2}, e_{i_3}, v_{i_3}$ является циклом.
(e) Граф G не содержит циклов длины 3. Сделать так, чтобы в выражении отрицания применялись только к предикатам P и Q.

Задача 13. Построить пятимерный булев куб.

Задача 14. Доказать, что дерево — двудольный граф.

Задача 15. Пусть $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ — множество вершин. Сколько существует различных графов на этих вершинах?

Задача 16. Рассмотрим полный граф с 4 вершинами, каждое ребро которого окрашивается в красный цвет с вероятностью $1/5$ и окрашивается в синий цвет с вероятностью $4/5$.

1. Какая вероятность того, что весь граф будет окрашен в красный цвет?
2. Какая вероятность того, что граф, содержащий эти 4 вершины и все красные рёбра будет деревом?

Задача 17. Какие из следующих пар графов являются изоморфными и почему?

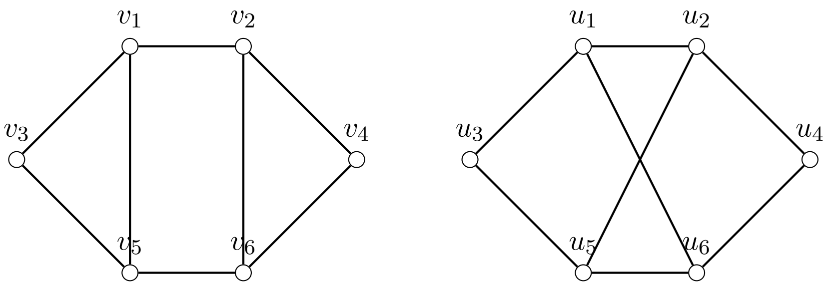

Рис 1.

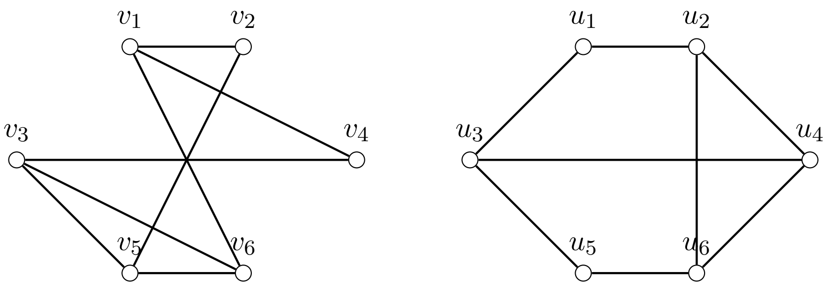

Рис 2.

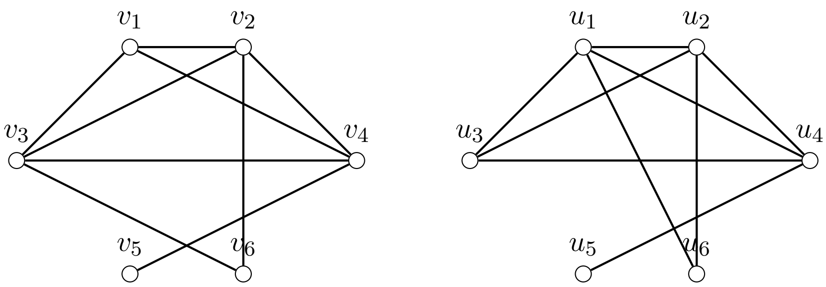

Рис 3.

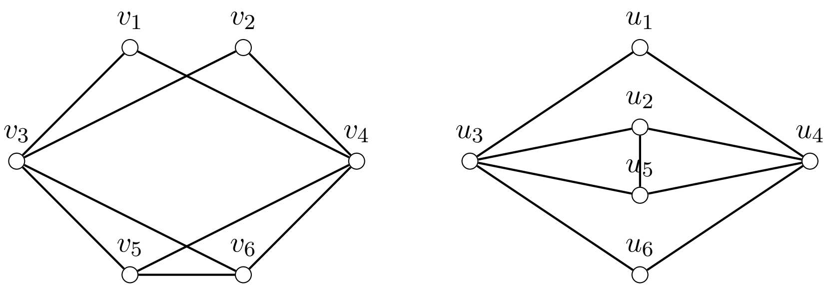

Рис 4.

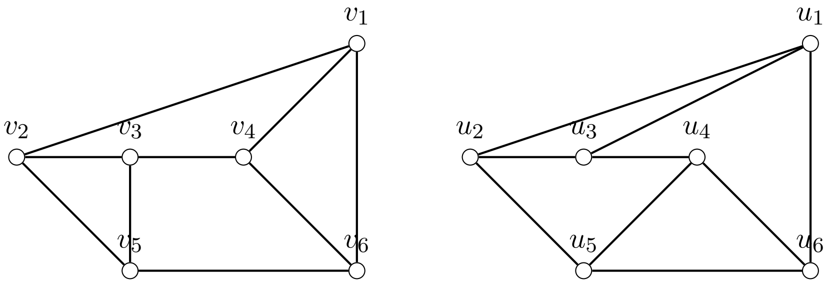

Рис 5.

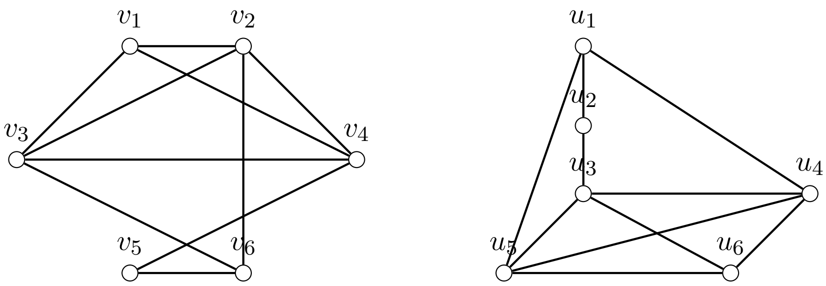

Рис 6.

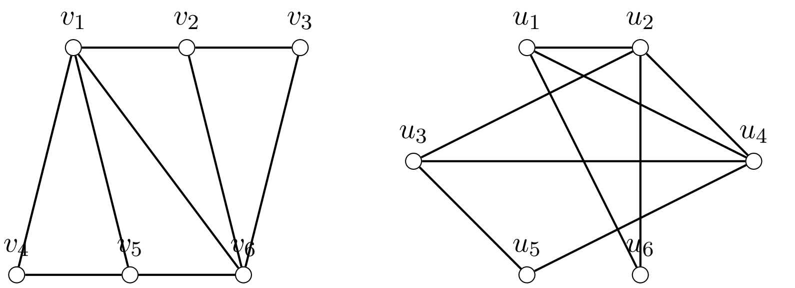

Рис 7.

Задача 18. Изобразить два неизоморфных графов с набором степеней вершин $(1, 1, 2, 2, 3, 3, 4)$.

Задача 19. Найти количество попарно неизоморфных графов с 12 вершинами, в которых степень каждой вершины равна 2.

Задача 20. Найти количество попарно неизоморфных графов с 6 вершинами и 13 рёбрами.

Задача 21. Найти количество попарно неизоморфных графов со следующим набором степеней вершин.

(a) $(6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7)$;
(b) $(4, 4, 4, 6, 6, 6, 6)$;
(c) $(13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 12, 12, 11, 11, 11, 11)$.