

Школа лингвистики, 2024-25 уч. год

Дискретная математика для лингвистов

Функции алгебры логики 2 (4 февраля 2025 г.)

В. В. Кочергин, А. В. Михайлович

Задача 1. Представить в виде СДНФ

- (a) $x \vee y$;
- (b) $(x_1 \vee x_2) \rightarrow x_3$;
- (c) (01010001);
- (d) $(x_1 \oplus x_2)(x_3 \rightarrow \overline{x_2}x_4)$;

Задача 2. Представить в виде СКНФ

- (a) $x_1 \oplus x_2$;
- (b) $x_1\overline{x_2} \vee x_1x_3 \vee \overline{x_2}x_3$;
- (c) (00101110).

Задача 3. Написать формулу, использующую только функции $x \& y$, $x \oplus y$ и 1, а затем упростить её, для функций

- (a) $x \vee y \vee z$;
- (b) $xy \vee xz \vee yz$.

Задача 4. Выразима ли функция $x \oplus y$ через функцию $x \rightarrow y$?

Задача 5. (a) Выразить функцию $x \downarrow y$ через функцию $x \mid y$.

- (b) Выразить функцию $x \downarrow y$ через функцию $x \mid y$ с использованием минимально возможного числа операций (связок) $f \mid g$.

Задача 6. Число наборов из B^n , на которых булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ принимает единичные значения, называется *весом* функции f и обозначается через $\|f\|$. Показать, что если f существенно зависит ровно от k переменных, то $\|f\|$ делится на 2^{n-k} .

Задача 7 (*). Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — булева функция, существенно зависящая от всех переменных. Доказать, что для любого $k = 1, \dots, n-1$ в f можно так выбрать $n-k$ переменных и так подставить вместо них значения 0 и 1, что получившаяся булева функция будет существенно зависеть от всех оставшихся k переменных.

Задача 8. Написать формулу, использующую только функции $x \& y$, $x \vee y$ и $\overline{x}$ для функций от переменных x_1, x_2, x_3, x_4 , принимающих значение 1 только на наборах

- (a) (1001);
- (b) (0000), (1010), (1111).

Задача 9. Построить формулу над $P_2(2)$ (все функции алгебры логики, зависящие от двух переменных), реализующую функцию $f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$, которая принимает значение 1 тогда и только тогда, когда $|\tilde{x}| < |\tilde{y}|$ (где $|\tilde{x}|$ — число, двоичная запись которого задается набором $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_n)$; старшие разряды расположены слева).

Задача 10 (*). Найти число функций $f(x_1, \dots, x_n)$ таких, что

$$f(x_1 \rightarrow y_1, \dots, x_n \rightarrow y_n) = f(x_1, \dots, x_n) \rightarrow f(y_1, \dots, y_n).$$

Задача 11. Доказать, что некоторая переменная является существенной для булевой функции тогда и только тогда, когда она входит в её полином Жегалкина.

Задача 12 (*). Показать, что полином Жегалкина для функции $f(x_1, \dots, x_n)$ содержит слагаемое $x_1 x_2 \dots x_n$ тогда и только тогда, когда f имеет нечетный вес.

Задача 13 (*). Степенью полинома Жегалкина называется максимальная длина содержащихся в нем слагаемых. Доказать, что функция от n переменных, реализуемая полиномом Жегалкина степени k , принимает каждое из значений $0, 1$ на не менее чем 2^{n-k} наборах.

Задача 14. Найти число различных полиномов Жегалкина степени r от n переменных.

Задача 15 (*). Доказать, что из любого полинома Жегалкина от n переменных степени k ; $k \geq 3$, путем отождествления переменных можно получить полином Жегалкина степени в точности $k - 1$.

Задача 16. Выразима ли функция $x \oplus y$ через функцию $x \rightarrow y$?

Задача 17. Используя язык функций алгебры логики, докажите равенства

- (a) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;
- (b) $B \cup (A \setminus B) = A \cup B$;
- (c) $(A \setminus B) \cap ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) = A \setminus B$;
- (d) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

Задача 18. Пусть x, y, z — целые числа, для которых истинно высказывание

$$\overline{(x = y)} \& ((y < x) \rightarrow (2z > x)) \& ((x < y) \rightarrow (x > 2z)).$$

Чему равно x , если $z = 7$, $y = 16$?

Задача 19. Проследите за следующими рассуждениями. Сначала убеждаемся в истинности при произвольных A и B утверждения

$$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A).$$

Теперь возьмем произвольный угол. Пусть A — утверждение «косинус угла не превосходит 0», а B — «синус угла не превосходит 0». Утверждение «если косинус угла не превосходит 0, то синус угла не превосходит 0», очевидно, ложно; тогда истинным должно быть утверждение «если синус угла не превосходит 0, то косинус угла не превосходит 0», но оно также ложно. То есть оба утверждения в проверенной дизъюнкции ложны (при некотором выборе утверждений A и B), но сама дизъюнкция истинна! Найдите ошибку в рассуждениях.