

Школа лингвистики, 2024-25 уч. год**Дискретная математика для лингвистов****Элементы теории множеств (26 ноября – 3 декабря 2024 года)***В. В. Кочергин, А. В. Михайлович*

Задача 1. Про множества A и B известно, что $|B| \leq |A|$. Верно ли, что $B \subseteq A$? (через $|A|$ обозначается число элементов множества A .)

Задача 2. Известно, что $|A| = 3$, $|B| = 5$. Верно ли, что $|A \Delta B| \leq 5$? Какие значения может принимать число $|A \Delta B|$?

Задача 3. Какие из следующих утверждений верны для любых множеств A , B и C :

- а) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$; б) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$; в) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \cup B$;
 д) $A \setminus (B \setminus A) = A \cap B$; е) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$ ф) $A \setminus B = B \setminus A$?

Задача 4. Нарисуйте все отображения вида

- (а) $\{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2\}$;
 (б) $\{1, 2\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$.

Какие отображения вида $\{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ могут быть получены последовательным применением отображений из пунктов а) и б)?

Задача 5. Среди следующих отображений укажите все инъекции, сюръекции и биекции¹:

- (а) Отображение $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ задаётся правилом $x \rightarrow x^2$;
 (б) Отображение $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ задаётся правилом $x \rightarrow x^2$;
 (в) Отображение $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ задаётся правилом $x \rightarrow x^3$;
 (д) Отображение $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ задаётся правилом $x \rightarrow nx$, где n — фиксированное целое число.
 (е) Отображение $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ задаётся правилом $x \rightarrow bx$, где b — фиксированное рациональное число.

Какие из отображений обратимы?

Задача 6. На окружности отмечены 1000 белых точек и одна черная. Чего больше: треугольников с вершинами в белых точках или четырехугольников, у которых одна вершина черная, а остальные три — белые?

Задача 7. Докажите, что

- (а) множество точек отрезка $[3, 5]$ и отрезка $[15, 33]$ равномощны;
 (б) интервал $(0, 1)$ и луч $(0, \infty)$ равномощны.

Задача 8. Докажите, что множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ счётно.

Задача 9. Счётно ли объединение

- (а) конечного множества со счётным множеством;
 (б) конечного числа счётных множеств;
 (в) счётного числа счётных множеств?

Задача 10. Счётно ли любое бесконечное множество непересекающихся

- (а) интервалов на прямой, имеющих длину больше 1;

¹ $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел; $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел, то есть чисел вида $\frac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Q}$, $q \in \mathbb{N}$; $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел.

- (b) любых интервалов на прямой;
- (c) кругов на плоскости;

Задача 11. Верно ли, что квадрат со стороной единица равномошен отрезку $[0, 1]$?

Задача 12. Методом математической индукции доказать, что законы де Моргана выполняются для любого количества компонент.