

Задачи к семинарам
по курсу «Дискретная математика»
ФИКЛ, 2024/25 учебный год

Тема: Комбинаторика: последовательность Фибоначчи

Доказать свойства последовательности Фибоначчи $\{f_n\}$, задаваемой рекуррентным соотношением $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ и начальными условиями $f_1 = f_2 = 1$ (или, что то же самое, начальными условиями $f_0 = 0, f_1 = 1$):

Задача 1. Последовательность Фибоначчи имеет вид:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Задача 2. Пусть φ — «золотое сечение», т.е. $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$. Тогда для n -го члена последовательности Фибоначчи справедливы формулы:

- а) $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^n - (-\varphi)^{-n})$ (формула Бине);
- б) $f_n = \left\lfloor \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} \right\rfloor$.

Задача 3. Для всех $n \geq 0$ верно равенство

$$C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \dots = f_{n+1}.$$

Задача 4. Справедливы равенства

$$f_{n+m} = f_{n-1}f_m + f_nf_{m+1} = f_{n+1}f_{m+1} - f_{n-1}f_{m-1}.$$

Задача 5. Элементы последовательности Фибоначчи удовлетворяют следующим соотношениям:

- а) $f_1 + f_2 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1$;
- б) $f_1 + f_3 + \dots + f_{2n-1} = f_{2n}$;
- в) $f_2 + f_4 + \dots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$;
- г) $f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2 = f_nf_{n+1}$;
- д) $f_n^2 + f_{n+1}^2 = f_{2n+1}$;
- е) $f_{n+1}^2 = f_nf_{n+2} + (-1)^n$;
- ж) $f_1f_2 + f_2f_3 + \dots + f_{2n}f_{2n+1} = f_{2n+1}^2 - 1$;
- з) $f_3 + f_6 + \dots + f_{3n} = (1/2)(f_{3n+2} - 1)$;
- и) $f_{3n} = f_{n+1}^3 + f_n^3 - f_{n-1}^3$;
- к) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$.

Задача 6. Для любых n и $m = kn$ число f_m делится на f_n .

Задача 7. Любые два соседних члена последовательности Фибоначчи взаимно просты. Более того,

$$(f_n, f_m) = f_{(n,m)},$$

где (a, b) — наибольший общий делитель чисел a и b .

Задача 8. Найдется ли среди первых 1000000001 членов последовательности Фибоначчи число, оканчивающееся четырьмя нулями?

Задача 9. В последовательности Фибоначчи выбрано 8 подряд идущих элементов. Докажите, что их сумма не является членом последовательности Фибоначчи.

Задача 10. Любое натуральное число n может быть представлено, причем единственным образом, в виде

$$n = \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k f_k,$$

где $\alpha_i \in \{0, 1\}$, $\alpha_i + \alpha_{i+1} \leq 1$, $i = 2, 3, \dots$

Задача 11. Для производящей функции $F(x)$ последовательности Фибоначчи справедливо равенство

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

(так как степенной ряд абсолютно сходится в некоторой окрестности нуля, то под производящей функцией можно понимать функцию, к которой сходится соответствующий степенной ряд).