

1 Предикаты

1.1 Исчисление высказываний

Будем рассматривать высказывания — предложения которые могут быть либо истинными, либо ложными¹. Например, высказывания «4 — чётное число», « $4 < 7$ » являются истинными, а высказывания «6 — простое число», « $2+3=4$ » — ложными. Таким образом, высказывания можно рассматривать как объекты, принимающие значение 1 (если высказывание истинно) и значени 0 (если высказывание ложно). А значит, мы можем применять к высказываниям функции алгебры логики, получая при этом сложные высказывания.

Пусть A и B — произвольные высказывания. Тогда.

1. $A \& B$ — высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания (« A и B »)
2. $A \vee B$ — высказывание, истинное тогда и только тогда, когда хотя бы одно из высказываний A , B истинно (« A или B »)
3. $\bar{A}$ — высказывание, истинное тогда и только тогда, когда высказывание A ложно (не A)
4. $A \rightarrow B$ — высказывание, истинное тогда и только тогда, когда хотя бы одно из высказываний B , $\bar{A}$ истинно («если A , то B »)
5. $A \sim B$ — высказывание, истинное тогда и только тогда, когда высказывания A и B одновременно истинны или одновременно ложны (« A эквивалентно B »).

Сложное высказывание называется *тождественно истинным*, если оно истинно при любых значениях выходящих в него элементарных высказываний. Например, $A \vee \bar{A}$ — тождественно истинное высказывание.

Сложное высказывание называется *тождественно ложным*, если оно ложно при любых значениях выходящих в него элементарных высказываний. Например, $A \& \bar{A}$ — тождественно ложное высказывание.

1.2 Исчисление предикатов

Будем рассматривать предложения, зависящие от параметров. Например, « x пришёл на лекцию», « $x \leq y$, x посещает занятия $|y$ в день недели z ». Каждое из этих предложений при конкретных значениях x, y, z становится высказыванием, принимающим значение «истина» или «ложь». Такого рода предложения называются предикатами.

Более точно, предикатами будем называть функции $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, аргументы которых принимают значения из некоторого множества M , а сами функции принимают значения 0 («ложь») или 1 («истина»). Предикат, зависящий от n переменных, называется n -местным предикатом. Предикат, переменные которого принимают значения из множества M , будем называть предикатом, определённым на множестве M (предикатом над M).

¹Отметим, что понятие «высказывание» является неопределимым, и может быть только пояснено.

Пример 1. M — множество натуральных чисел. Примеры предикатов:

1. « x — простое число»;
2. « $x < y$ » (отметим, что в этом случае предикат двуместный);
3. « $x + y = z$ » (трёхместный предикат).

Пример 2. M — множество студентов 1 курса программы «Фундаментальная и компьютерная лингвистика». Примеры предикатов:

1. « x пришёл/пришла на занятия»;
2. « x и y вместе едут домой» (двуместный предикат);
3. « x объясняет дискретную математику y » (двуместный предикат).

Отметим, что если предикат зависит от нескольких переменных, то эти переменные могут быть определены на разных множествах².

Пример 3. M_1 — множество студентов 1 курса программы «Фундаментальная и компьютерная лингвистика», M_2 — множество дисциплин, из которых состоит учебная программа 1 курса «Фундаментальная и компьютерная лингвистика». Примеры предикатов:

1. « x освоил y ». В данном случае переменная x определена на множестве M_1 , а переменная y — на множестве M_2 .
2. «Сегодня x посетил занятие y и пропустил занятие z ». Переменная x определена на множестве M_1 , переменные y и z — на множестве M_2 .

Поскольку предикаты принимают значения 0 и 1 («ложь» и «истина»), то мы можем применять к ним функции алгебры логики. При этом также получаются предикаты.

Кроме того, для предикатов вводятся две новые операции (навешивание кванторов)³.

Квантор общности. Пусть $P(x, y_1, \dots, y_n)$ — некоторый предикат, зависящий от переменных $x, y_1, \dots, y_n$. Высказывание « $P(x, y_1, \dots, y_n)$ истинно для всех x » будем обозначать $(\forall x)P(x, y_1, \dots, y_n)$. Это высказывание зависит от переменных $y_1, \dots, y_n$, причём на произвольном наборе $\beta_1, \dots, \beta_n$ оно принимает значение 1 тогда и только тогда, когда для любого значения α переменной x выполняется равенство $P(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_n) = 1$. Такой переход от предиката $P(x, y_1, \dots, y_n)$ к предикату $(\forall x)P(x, y_1, \dots, y_n)$ называется навешиванием квантора общности.

Квантор существования. Пусть $P(x, y_1, \dots, y_n)$ — некоторый предикат, зависящий от переменных $x, y_1, \dots, y_n$. Высказывание « $P(x, y_1, \dots, y_n)$ истинно при некотором x » будем обозначать $(\exists x)P(x, y_1, \dots, y_n)$. Это высказывание зависит от переменных $y_1, \dots, y_n$, причём на произвольном наборе $\beta_1, \dots, \beta_n$ оно принимает значение 1 тогда и только тогда, когда существует некоторое значение α переменной x , такое, что $P(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_n) = 1$. Такой переход от предиката $P(x, y_1, \dots, y_n)$ к предикату $(\exists x)P(x, y_1, \dots, y_n)$ называется навешиванием квантора существования.

²Однако, можем считать, что все переменные определены на одних и тех же множествах, взяв в качестве этого множества объединение исходных множеств. Так, в примере 3, можно считать, что предикаты определены на множестве $M \times M$, где $M = M_1 \cup M_2$.

³На самом деле достаточно ввести только один из кванторов, другой же выражается через первый с использованием функции отрицания.