1 Линейные рекуррентные соотношения

1.1 Линейные однородные рекуррентные соотношения и возвратные последовательности

Маркушевич А. И. Возвратные последовательности. М.: Гос. изд.-во технико-теоретической литературы, 1950.

Рассмотрим следующую задачу.

Нужно найти число f_n слов из букв a и b длины n, обладающих свойствами:

1) первым символом слова является буква a;

2) последним символом слова является буква a;

3) в слове нет двух стоящих рядом букв b.

Пример 1. Найти число f_n слов[1] длины n, состоящих из символов a и b, у которых первый и последний символы a и нет двух стоящих рядом символов b.

Нетрудно видеть, что $f_1 = 1$ — есть единственное слово длины 1, удовлетворяющее условиям — a. Также нетрудно видеть, что единственное слово длины 2, удовлетворяющее условиям — это aa. Слова длины 3 также можно перечислить явным образом: aaa и aba. Посчитаем число слов длины 4. Разобьём их на две группы в зависимости от того, какой второй символ. Если второй символ a, то эти слова представляют собой последовательное написание символа a и некоторого слова длины 3: $aaaa$ и $aaba$. Если же второй символ b, то эти слова представляют собой последовательное написание символов ab и некоторого слова длины 2: $abaa$. Таким же образом можно посчитать слова длины n: если второй символ a, то эти слова представляют собой последовательное написание символа a и некоторого слова длины $n-1$, а если второй символ b, то эти слова представляют собой последовательное написание символов ab и некоторого слова длины $n-2$. Получаем сотношение $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, справедливое для любого значения n, начиная с $n = 3$.

Итак, последовательность $\{f_n\}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ и начальным условиям $f_1 = f_2 = 1$. Такая последовательность называется *последовательностью Фибоначчи* (в исходной задаче специально добавлены первые два условия, чтобы получилось именно эта последовательность, а не «сдвинутая»). Последовательность Фибоначчи возникает очень часто в самых разных областях естественнонаучного знания. В частности, f_n равно количеству перестановок множества $\{1, 2, \ldots, n-1\}$, удовлетворяющих свойству: каждое из чисел находится либо на своем месте (у числа i «своё» место тмеет номер i), либо на одном из соседних мест.

Отметим, что часто удобно считать, что начальный элемент последовательности имеет номер «0», а не «1». Это во многом связано с частым применением в комбинаторике и оставшимся за пределами нашего рассмотрения метода производящих функций, о котором можно почитать, например, в [**?**]. В этом случае последовательность Фибоначчи задается рекуррентным соотношением $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ и начальными условиями $f_0 = 0$, $f_1 = 1$.

Последовательность Фибоначчи является частным случаем возвратных последовательностей, задаваемых линейными однородными соотношеними с постоянными коэффициентами, о которых дальше и пойдет речь.

---

[1] Напомним, что словом называем любую последовательность указанных символов, необязательно осмысленную

А пока найдем явный вид для элементов последовательности Фибоначчи. Для этого введем еще одну последовательность равенствами

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Теперь по индукции докажем, что для любого целого неотрицательного n справедливо равенство $f_n = F_n$.

Найдём общий вид для f_n.

База индукции:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right) = 1;$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}\right) - \left(\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}\right)\right) = 1.$$

Индуктивный переход.

$$f_{n-1} + f_{n-2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right) +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right)$$

Наверное, возникает вполне естественный вопрос о том, как догадаться до такого замысловатого явного вида элементов последовательности Фибоначчи. Для ответа на него перейдем к изучению вопроса о нахождении всех последовательностей, удовлетворяющих рекуррентнымсоотношениям специального вида.

При изучении этого параграфа желательно, чтобы у изучающего были хотя бы на начальном уровне знания из области линейной алгебры, а также было бы полезно знакомство с комплексными числами. Однако попробуем обойтись без этого.

Пусть последовательность $\{x_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, с элементами из множества $\mathbb{R}$ действительных чисел (на идейном уровне практически ничего не поменяется, если элементы последовательности будут из множества $\mathbb{C}$ комплексных чисел) для всех значений n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$x_{n+k} = u_1 x_{n+k-1} + \ldots + u_{k-1} x_{n+1} + u_k x_n, \tag{1}$$

где $u_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, k$, $u_k \neq 0$.

Такое соотношение называется *линейным однородным рекуррентным соотношением* (*уравнением*) *порядка* k, а последовательность $\{x_n\}$, удовлетворяющая линейному однородному рекуррентному соотношению порядка k, т. е. являющаяся его решением, называется *возвратной последовательностью порядка* k.

Линейность соотношения 1 заключается в том, что все элементы последовательности входят в сотнршение как слагаемые с постоянными коэффициентами, а однородность определяется тем, что при переносе в соотношении 1 всех элементов последовательности вместе с их коэффициентами в левую часть, в правой части останется 0.

Перейдем к изучению множества всех последовательностей, являющихся решениями линейного однородного рекуррентного соотношения 1.

`Свойство 1`. Если последовательность $\{a_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, является решением рекуррентного соотношения 1, то для любого действительного числа γ последовательность $\{\gamma a_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, получающаяся из последовательности $\{a_n\}$ посредством умножения каждого элемента последовательности $\{a_n\}$ на число γ, также будет являться решением рекуррентного соотношения 1.

Свойство 1 проверяется непосредственно. Именно в силу наличия этого свойства линейное рекуррентное соотношение 1 является однородным. Для линейного соотношения признаком однородности также является тот факт, что нулевая последовательность (последовательность, все элементы которой — нули) является его решением.

`Свойство 2`. Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, являются решениями рекуррентного соотношения 1, то последовательность $\{d_n = a_n + b_n\}$, получающаяся поэлементным сложением последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, также будет являться решением рекуррентного соотношения 1.

Действительно, если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ являются решениями рекуррентного соотношения 1, то выполняются равенства

$$a_{n+k} = u_1 a_{n+k-1} + \ldots + u_{k-1} a_{n+1} + u_k a_n,$$
$$b_{n+k} = u_1 b_{n+k-1} + \ldots + u_{k-1} b_{n+1} + u_k b_n.$$

Складывая эти равенства, получаем соотношение

$$(a_{n+k} + b_{n+k}) = u_1(a_{n+k-1} + b_{n+k-1}) + \ldots + u_{k-1}(a_{n+1} + b_{n+1}) + u_k(a_n + b_n),$$

которое и говорит о том, что последовательность $\{d_n\}$ является решением рекуррентного соотношения 1.

`Свойство 3`. Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, являются решениями рекуррентного соотношения 1, то для любых действительных чисел γ_1 и γ_2 последовательность $\{\gamma_1 a_n + \gamma_2 b_n\}$ также будет являться решением рекуррентного соотношения 1.

Свойство 3 вытекает из свойств 1 и 2.

`Свойство 4`. Для любого набора действительных чисел $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1})$ существует единственная последовательность $\{a_n\}$, являющаяся решением рекуррентного соотношения 1 и удовлетворяющая начальным условиям

$$a_0 = \alpha_0, \quad a_1 = \alpha_1, \quad \ldots, \quad a_{k-1} = \alpha_{k-1}.$$

Действительно, первые k элементов последовательности $\{a_n\}$ (т. е. элементы с номерами $0, 1, \ldots, k-1$) определяются начальными условиями, а остальные элементы последовательности $\{a_n\}$, начиная с элемента a_k, однозначно определяются из рекуррентного соотношения.

Используя свойство 4, определим k последовательностей $\{a_n^{(0)}\}$, $\{a_n^{(1)}\}$, …, $\{a_n^{(k-1)}\}$ (здесь у элементов последовательностей номера последовательностей, к которым они относятся, мы вынуждены указывать как верхний индекс, и чтобы не путать с показателем степени, берем их в скобки), удовлетворяющих рекуррентному соотношению 1, задав их наборами начальных условий длины k. Эти k наборов длины k такие:

$$\begin{gathered}(1\ 0\ 0\ 0\ \ldots\ 0\ 0),\\ (0\ 1\ 0\ 0\ \ldots\ 0\ 0),\\ (0\ 0\ 1\ 0\ \ldots\ 0\ 0),\\ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\\ (0\ 0\ 0\ 0\ \ldots\ 0\ 1).\end{gathered}$$

Для любого набора констант $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ в силу свойства 3 последовательность $\{b_n\}$, задаваемая при всех n, $n \geq 0$, равенствами

$$b_n = c_0 a_n^{(0)} + c_1 a_n^{(1)} + \ldots + c_{k-1} a_n^{(k-1)}, \tag{2}$$

является решением рекуррентного соотношения 1.

Изменяя независимо друг от друга значение любой константы c_i, получаем новое решение соотношения 1, отличающееся как минимум в одном из первых k разрядов. Таким образом, мы имеем подмножество множества решений рекурретного соотношения 1, имеющее k независимых «степеней свободы» (для хотя бы немного знакомых с линейной алгеброй выпазимся более точно: мы имеем подпространство размерности k линейного пространства всех решений рекурретного соотношения 1).

Возникает вопрос: есть ли помимо последовательностей, имеющих представление 2, еще последовательности, удовлетворяющие соотношению 1? Пусть $\{b_n\}$ — произвольная последовательность, являющаяся решением рекурретного соотношения 1, а числа $b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$ — первые k элементов этой последовательности. Рассмотрим последовательность $\{b'_n\}$, задаваемую равенствами

$$b'_n = b_0 a_n^{(0)} + b_1 a_n^{(1)} + \ldots + b_{k-1} a_n^{(k-1)}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

В силу того, что для любого номера i, удовлетворяющего условию $0 \leq i \leq k-1$, у последовательностей $\{a_n^{(0)}\}$, $\{a_n^{(1)}\}$, …, $\{a_n^{(k-1)}\}$, кроме последовательности $\{a_n^{(i)}\}$, элементы с номером i равны нулю, а элемент последовательности $\{a_n^{(0)}\}$ с номером i, т. е. элемент $a_i^{(i)}$, равен единице, получаем, что $b'_i = b_i$ для всех значений i из множества $\{0, 1, \ldots, k-1\}$. Но тогда по свойству 4 последовательности $\{b_n\}$ и $\{b'_n\}$ совпадают. Следовательно, любая последовательность, являющаяся решением рекуррентного соотношения 1 имеет вид, указанный в 2.

Таким образом, множество решений соотношения 1 имеет ровно k «степеней свободы». Сформулируем этот факт строго и аккуратно, используя базовые понятия линейной алгебпы.

`Свойство 5.` Линейное пространство решений рекуррентного соотношения 1 порядка k имеет размерность ровно k.

Теперь отметим, что последовательности $\{a_n^{(0)}\}$, $\{a_n^{(1)}\}$, $\ldots$, $\{a_n^{(k-1)}\}$, через которые, как показано при установлении свойства 5, выражается (раскладывается) любая последовательность, являющаяся решением соотношения 1, в общем случаю задаются рекуррентным соотношением и значениями первых k элементов, а не имеют явную формулу для любого элемента последовательности. Перейдем к нахождению решений соотношения 1, задающихся явными формулами для каждого элемента последовательности. Для этого дадим одно фундаментальное определение.

В рекуррентном соотношении 1 порядка k сначала перенесем всё в левую часть равенства, а затем формально преобразуем левую часть в многочлен степени k от новой независимой переменной λ, проделав следующую процедуру: в рекуррентном соотношении элемент последовательности с наименьшим номером заменим на λ^0, элемент последовательности с номером, на единицу большим, — на λ^1 и т. д. Тем самым рекуррентное соотношение 1 на элементы последовательности превратится в следующее уравнение относительно введенной переменной λ:

$$\lambda^k - u_1\lambda^{k-1} - \ldots - u_{k-1}\lambda - u_k = 0. \tag{3}$$

Многочлен

$$\chi(\lambda) = \lambda^k - u_1\lambda^{k-1} - \ldots - u_{k-1}\lambda - u_k$$

k-й степени из левой части уравнения 3 называется *характеристическим многочленом рекуррентного соотношения* 1 порядка k.

`Свойство 6`. Пусть λ_0 — корень характеристического многочлена $\chi(\lambda)$ рекуррентного соотношения 1. Тогда последовательность $\{a_n\}$, задаваемая равенствами

$$a_n = (\lambda_0)^n, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

является решением этого рекуррентного соотношения.

Для проверки этого свойства достаточно подставить значения элементов последовательности $\{a_n\}$ в рекуррентное соотношение 1 и затем разделить обе части полученного равенства на λ^n (так как коэффициент u_k не равен нулю, то нуль не является корнем характеристического многочлена).

Тем самым, используя свойства 3 и 6, можно выписать общее решение линейного однородного рекуррентного соотношения, характеристический многочлен которого имеет столько корней, какова его степень:

`Свойство 7`. Если характеристический многочлен $\chi(\lambda)$ рекуррентного соотношения 1 порядка k имеет k различных корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, то в силу свойств 3 и 6 для любого набора констант $c_1, c_2, \ldots, c_k$ последовательность $\{a_n\}$, задаваемая равенствами

$$a_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \ldots + c_k\lambda_k^n, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

является решением этого соотношения.

Строго говоря, еще нужно показать, что в описанном в свойстве 7 случае других решений нет. Для этого для знакомых с базовыми понятиями линейной алгебры достаточно сослаться на то, что определитель Вандермонда отличен от 0, для остальных придется оставить этот факт без доказательства.

Теперь разберем случай, когда характеристический многочлен $\chi(\lambda)$ с корнем λ_0 можно представить в виде

$$\chi(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^s g(\lambda),$$

где $s \geq 2$, а $g(\lambda)$ — некоторый многочлен переменной (λ). В таком случае число λ_0 называется *кратным корнем* многочлена $\chi(\lambda)$.

Натуральное число s называется *кратностью* корня λ_0, если многочлен $\chi(\lambda)$ можно предстваить в виде произведения функции $(\lambda - \lambda_0)^s$ и некоторого многочлена переменной λ, а в виде произведения функции $(\lambda - \lambda_0)^{s+1}$ и некоторого многочлена переменной λ — нельзя. Корни многочлена, не являющиеся кратными, называются *простыми корнями* или *корнями кратности* 1.

В случае, когда у характеристического многочлена $\chi(\lambda)$ есть хотя бы один кратный корень, возникает следующая проблема: общее число различных корней многочлена $\chi(\lambda)$ меньше чем k, поэтому использование свойств 3 и 6 позволяет выписать множество решений рекуррентного соотношения 1, имеющее менее k степеней свободы (подпространство решений размерности менее k), в то время как все множество решений рекуррентного соотношения 1 имеет k степеней свободы (все пространство решений имеет размерность k). На самом деле проблемы нет — покажем, что корень кратности s, $s \geq 2$ порождает подпространство решений размерности не 1, а размерности s.

`Свойство 8`. Пусть λ_0 — корень кратности s, $s \geq 2$, характеристического многочлена $\chi(\lambda)$ рекуррентного соотношения 1. Тогда последовательность $\{a_n\}$, задаваемая равенствами

$$a_n = n(\lambda_0)^n, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

является решением этого рекуррентного соотношения.

Доказательство этого свойства начнем с обоснования следующего факта: для любого n, $n \geq 2$, производная функции $\chi(\lambda)\lambda^n$ в точке $\lambda = \lambda_0$ равна 0. Действительно:

$$\begin{aligned}\big(\chi(\lambda)\lambda^n\big)' = \big((\lambda - \lambda_0)^s g(\lambda)\lambda^n\big)' = s(\lambda - \lambda_0)^{s-1} g(\lambda)\lambda^n + (\lambda - \lambda_0)^s \big(g(\lambda)\lambda^n\big)' = \\ = (\lambda - \lambda_0)\big(s(\lambda - \lambda_0)^{s-2} g(\lambda)\lambda^n + (\lambda - \lambda_0)^{s-1}\big(g(\lambda)\lambda^n\big)'\big).\end{aligned}$$

Последнее выражение при подстановке вместо переменной λ значения λ_0 обращается в 0.

Теперь явным образом найдем значение производной функции $\chi(\lambda)\lambda^n$:

$$\big(\chi(\lambda)\lambda^n\big)' = (n+k)\lambda^{n+k-1} - u_1(n+k-1)\lambda^{n+k-2} - \ldots - u_{k-1}(n+1)\lambda^n - u_k n\lambda^{n-1}.$$

Таким образом,

$$(n+k)\lambda_0^{n+k-1} - u_1(n+k-1)\lambda_0^{n+k-2} - \ldots - u_{k-1}(n+1)\lambda_0^n - u_k n\lambda_0^{n-1} = 0.$$

Умножая обе части последнего равенства на λ_0 (отметим, что $\lambda_0 \neq 0$, так как у характеристического многочлена $\chi(\lambda)$ не может быть нулевого корня ввмду отличия свободного члена характеристического многочлена от нуля), получаем справедливость для любого неотрицательного n равенства

$$(n+k)\lambda_0^{n+k} - u_1(n+k-1)\lambda_0^{n+k-1} - \ldots - u_{k-1}(n+1)\lambda_0^{n+1} - u_k n\lambda_0^n = 0,$$

которое и означает, что последовательность $a_n = n(\lambda_0)^n$ является решением возвратного уравнения 1.

Индукцией по параметру t можно доказать (мы доказывать не будем) следующее обобщение свойства 8.

`Свойство 9`. Пусть λ_0 — корень кратности s, $s \geq t \geq 1$, характеристического многочлена $\chi(\lambda)$ рекуррентного соотношения 1. Тогда последовательность $\{a_n\}$, задаваемая равенствами

$$a_n = n^{t-1}(\lambda_0)^n, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

является решением этого рекуррентного соотношения.

Наконец, из свойств 3 и 9 вытекает такое свойство.

`Свойство 10`. Пусть λ_0 — корень кратности s, $s \geq 1$, характеристического многочлена $\chi(\lambda)$ рекуррентного соотношения 1. Тогда для любого набора констант $c_{00}, c_{01}, \ldots, c_{o,s-1}$ последовательность $\{a_n\}$, задаваемая равенствами

$$a_n = (c_{00} + c_{01}n + \ldots + c_{o,s-1}n^{s-1})(\lambda_0)^n, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

является решением этого рекуррентного соотношения.

Таким образом, если характеристический многочлен $\chi(\lambda)$ рекуррентного соотношения 1 порядка k имеет q различных корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ суммарной кратности k, т. е. характеристический многочлен $\chi(\lambda)$ имеет вид

$$\chi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{s_1}(\lambda - \lambda_2)^{s_2} \ldots (\lambda - \lambda_q)^{s_q}, \quad s_1 + s_2 + \ldots + s_q = k,$$

то для любого набора

$$c_{10}, c_{11}, \ldots c_{1,s_1-1}, c_{20}, c_{21}, \ldots c_{2,s_2-1}, \ldots, c_{q0}, c_{q1}, \ldots c_{q,s_q-1},$$

состоящего из $s_1 + s_2 + \ldots + s_q = k$ констант, последовательность $\{a_n\}$, задаваемая равенствами

$$\begin{aligned} a_n = (c_{10} + c_{11}n + \ldots + c_{1,s_1-1}n^{s_1-1})(\lambda_1)^n + \\ + (c_{20} + c_{21}n + \ldots + c_{2,s_2-1}n^{s_2-1})(\lambda_2)^n + \ldots + \\ + (c_{q0} + c_{q1}n + \ldots + c_{q,s_q-1}n^{s_q-1})(\lambda_q)^n, \quad n = 0, 1, \ldots, \end{aligned} \tag{4}$$

является решением этого соотношения.

Так как размерность найденого пространства решений (число «степеней свободы», т. е. число независимых констант, в этом множестве решений) равно в точности k, то в силу свойства 5 других решений нет. Следовательно, последняя система равенств задает все множество решений линейного однородного рекуррентного соотношения 1.

Отметим, что над множеством $\mathbb{R}$ действительных чисел далеко не каждый многочлен степени k имеет k корней даже с учетом их кратности — например, квадратный трехчлен с отрицательным дискриминантом вообще не имеет корней. При переходе к решению рекуррентного соотношения 1 над множеством $\mathbb{C}$ комплексных чисел чисел (в этом случае решениями будут последовательности комплексных чисел) ситуация меняется — в силу основной теоремы алгебры характеристический многочлен $\chi(\lambda)$ степени k будет иметь ровно k корней с учетом кратности. Поэтому над множеством комплексных чисел для любого линейного однородного рекуррентного соотношения 1 общее решение (т. е. множество всех последовательностей, удовлетворяющих этому соотношению) задается формулой 4. Если еще даны значения первых k элементов последовательности, то по этой информации можно в силу свойства 4 однозначно найти значения констант из представления 4. При этом в случае, когда коэффициенты рекуррентного соотношения 1 и значения первых k элементов последовательности — действительные числа, полученная последовательность будет тоже состоять только из действительных чисел.

Рассмотрим несколько примеров решения линейных однородных рекуррентных соотношений. Задачи на эту тему могут быть двух типов: 1) найти общее решение такого рекуррентного уравнения — в этом случае требуется описать множество всех последовательностей, являющихся решениями заданного соотношения; 2) по рекуррентному соотношению порядка k и заданным значениям первых k элементов последовательности найти ту единственную последовательность, которая удовлетворяет и рекуррентному соотношению и начальным условиям.

Пример 2. Найти последовательность $\{a_n\}$ по рекуррентному соотношению и начальным условиям:

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0 \ \ (n \geq 0); \quad a_0 = 10, \ a_1 = 16.$$

Сначала найдем общее решение заданного однородного рекуррентного уравнения. Для этого выпишем характеристический многочлен соотношения и найдём его корни:

$$\lambda^2 - \lambda + 3 = 0;$$
$$\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 3.$$

Кратность корней равна единице и число корней равно степени характеристического многочлена, поэтому для выписывания множества всех последовательностей, удовлетворяющих рекуррентному соотношению, даже необязательно использовать формулу 4, а можно воспользоваться более простым свойством 7. В любом случае выписываем общее решение рекуррентного соотношения $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$:

$$a_n = c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot 3^n,$$

где в качестве констант c_1 и c_2 можно брать любые числа.

Теперь среди двумерного множества полученных решений выберем ту единственную (в силу свойства 4) последовательность, которая удовлетворяет не только рекуррентному соотношению, но и заданным начальным условиям. Элемент a_0 с одной стороны по условию равен 10, а с другой — выражается формулой $a_0 = 1^0 \cdot c_1 + 3^0 \cdot c_2$. Приравнивая, получаем первое уравнение. Второе уравнение получается приравниваем значений элемента a_1. Таким образом имеем:

$$\left\{ \begin{array}{l} 10 = 1^0 \cdot c_1 + 3^0 \cdot c_2; \\ 16 = 1^1 \cdot c_1 + 3^1 \cdot c_2; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 + c_2 = 10; \\ c_1 + 3c_2 = 16; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 = 7; \\ c_2 = 3. \end{array} \right.$$

Следовательно, $a_n = 7 \cdot 1^n + 3 \cdot 3^n = 7 + 3^{n+1}$.

На всякий случай проверим (эта проверка необязательна), что найденная последовательность — искомая. Для этого вместо элементов a_n, $a_{n=1}$ и a_{n+2} подставим в рекуррентное соотношение $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n$ их выражения в соотвествии с выведенной формулой, т. е. сделаем такие замены:

$$a_n = 7 + 3^{n+1}, \ \ a_{n+1} = 7 + 3^{n+2}, \ \ a_{n+2} = 7 + 3^{n+3}.$$

Нетрудно убедиться, что равенство

$$7 + 3^{n+3} = 4(7 + 3^{n+2}) - 3(7 + 3^{n+1})$$

действительно является истинным.

Пример 3. Найти последовательность $\{x_n\}$ по рекуррентному соотношению и начальным условиям:

$$x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2} \ \ (n \geq 2); \quad x_0 = 6, \ x_1 = 6.$$

Сначала найдем общее решение заданного однородного рекуррентного уравнения. Для этого выпишем характеристический многочлен соотношения и найдём его корни:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0;$$
$$\lambda_1 = \lambda_2 = 3.$$

Кратность корня $\lambda = 3$ равна 2, число корней с учетом кратности равно степени характеристического многочлена. Используя в этом случае формулу 4, выписываем общее решение рекуррентного соотношения $x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}$:

$$x_n = (c_0 + c_1 n) \cdot 3^n,$$

где в качестве констант c_1 и c_2 можно брать любые числа.

Теперь среди найденного множества решений выберем ту последовательность, которая удовлетворяет не только рекуррентному соотношению, но и заданным начальным условиям. Подставляя значения $x_0 = 6$ и $x_1 = 6$ имеем:

$$\begin{cases} 6 = (c_0 + c_1 \cdot 0) \cdot 3^0; \\ 6 = (c_0 + c_1 \cdot 1) \cdot 3^1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_0 = 6; \\ (c_0 + c_1) \cdot 3 = 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_0 = 6; \\ c_1 = -4. \end{cases}$$

Следовательно, $x_n = (6 - 4n) \cdot 3^n$.

Пример 4. Найти все решения рекуррентного соотношения

$$x_{n+1} = 3x_n - 4x_{n-2}.$$

В этой задаче нужно найти только общее решение заданного однородного рекуррентного уравнения. Выпишем характеристический многочлен соотношения и приравняем его к нулю:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0.$$

Находить корни многочлена третьей степени в общем случае существенно труднее[2], чем корни многочлена второй степени. В решении этой проблемы достаточно часто помогает следующее соображение: если у многочлена целые коффициенты, а коэффициент при старшей степени переменной равен единице, то в случае наличия у многочлена целого корня, этот целый корень делит свободный член многочлена. В нашем случае многочлен

[2]Корни многочленов третьей и четвертой степени, формально говоря всегда могут быть выражены, в отличие от случая многочленов степени 5 и больше, в виде формулы, использующей арифметические операции и радикалы (корни). Но даже в случае многчленов третьей степени известная формула Кардано, во-первых, требует предварительной замены переменной, чтобы в многочлене коэффициент при x^2 был нулевым, а во-вторых, настолько сложна, что фактически не применяется на практике.

$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$ имеет целые коэффициенты, коэффициент при старшей степени λ^3 равен 1, а свободный член равен 4. Поэтому если у этого многочлена есть целый корень, но он делит -4. Целых чисел, делящих 4, немного — это $1, -1, 2, -2, 4. -4$. Последовательно подставляя эти значения, убеждаемся, что $\lambda = -1$ — корень. Тогда (в силу теоремы Безу) характеричтический многочлен можно представить в виде:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = (\lambda - (-1))P(\lambda),$$

где $P(\lambda)$ — квадратный трехчлен переменной λ.

Те, кто умеет делить уголком (столбиком), легко найдут многочлен $P(\lambda)$, разделив характеристический многочлен на $\lambda + 1$.

Рассмотрим другой способ нахождения многочлена $P(\lambda)$. Соображения, используемые при его реализации, чуть позже будут применяться при решении неоднородных рекуррентных соотношений.

Понятно, что многочлен $P(\lambda)$ будет многочленом второй степени, причем коэффициент при λ^2 будет равен 1, чтобы при умножении на $\lambda + 1$ коэффициент при старшей степени λ^3 был равен 1. Таким образом, многочлен $P(\lambda)$ должен иметь вид

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b,$$

где значения коэффициентов a и b предстоит найти. Такой метод нахождения многочлена $P(\lambda)$ называется *методом неопределенных коэффициентов*.

Найдем коэффициенты a и b. Для этого перемножим многочлены $P(\lambda)$ и $\lambda + 1$:

$$P(\lambda)(\lambda + 1) = (\lambda^2 + a\lambda + b)(\lambda + 1) = \lambda^3 + (a + 1)\lambda^2 + (a + b)\lambda + b.$$

При этом мы должны получить в точности многочлен $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$. Так как два многочлена равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при всех степенях переменной, то, приравнивая коэффициенты при λ^2 и λ, а также свободные члены, получаем систему

$$\begin{cases} a + 1 = -3 \\ a + b = 0 \\ b = 4 \end{cases},$$

решая которую, находим, что $a = -4$, $b = 4$. Таким образом,

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = (\lambda + 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (\lambda + 1)(\lambda - 2)^2.$$

Итак, у характеристического многочлена степени 3 корень $\lambda = 2$ имеет кратность 2, а корень $\lambda = -1$ имеет кратность 1. Число корней с учетом кратности равно степени характеристического многочлена. Поэтому, используя в этом случае формулу 4, выписываем множество всех решений рекуррентного соотношения $x_{n+1} = 3x_n - 4x_{n-2}$:

$$x_n = (c_0 + c_1 n) \cdot 2^n + c_3(-1)^n,$$

где в качестве констант c_0, c_1 и c_2 можно брать любые числа.

1.2 Линейные неоднородные рекуррентные соотношения

Пусть последовательность $\{x_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, с элементами из множества $\mathbb{R}$ действительных чисел (можно также считать, что элементы последовательности являются комплексными числами) для всех значений n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$x_{n+k} = u_1 x_{n+k-1} + \ldots + u_{k-1} x_{n+1} + u_k x_n + f(n), \tag{5}$$

где $u_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, k$, $u_k \neq 0$, а $f(n)$ — отличная от тождественно нулевой функция целого неотрицательного аргумента.

Соотношение 5 называется *линейным неоднородным рекуррентным соотношением* (*уравнением*) *порядка* k. Неоднородность соотношения 5 заключается в наличии ненулевой функции $f(n)$ и проявляется в том, что последовательности $\{x_n\}$ и $\{cx_n\}$, соответствующие элементы которых отличаются в одно и то же число c, не равное 1, раз, не могут одновременно быть решениями этого соотношения; в частности, тождественно нулевая последовательность не является решением неоднородного линейного рекуррентного соотношения.

Также как и в случае линейных однородных рекуррентных соотношений задачи решения линейных неоднородных рекуррентных соотношений могут быть двух типов: 1) найти общее решение такого неоднородного рекуррентного уравнения — в этом случае требуется описать множество всех последовательностей, являющихся решениями заданного соотношения; 2) по неоднородному рекуррентному соотношению порядка k и заданным значениям первых k элементов последовательности найти ту единственную последовательность, которая удовлетворяет и рекуррентному соотношению и начальным условиям. Если решена задача первого типа, т. е. найдено множество всех последовательностей, удовлетворяющих заданному линейному неоднородному рекуррентному соотношению порядка k, то по заданым первым k элементам остальные элементы решения находятся точно так же, как и в однородном случае. Поэтому уделим основное внимание задачам первого типа.

Ключевым моментом в продвижении в этом направлении является тот факт, что для того, чтобы получить общее решение неоднородного рекуррентного соотношения нужно к общему решению однородного рекуррентного соотношения добавить частное решение неоднородного рекуррентного соотношения. Разберемся, что стоит за этими словами. Сначала распространим уже использовавшееся в однородном случае понятие на общий случай и введем обозначения.

Общим решением линейного рекуррентного уравнения (*соотношения*) 1 или 5 называется множество всех последовательностей, удовлетворяющих этому соотношению.

Теорема 1. *Пусть $X^{\text{он}}$ — общее решение линейного неоднородного рекуррентного соотношения* 5, *$X^{\text{оо}}$ — общее решение линейного однородного рекуррентного соотношения* 1, *получающегося из соотношения* 5 *заменой функции $f(n)$ на 0, а $\left\{x_n^{\text{чн}}\right\}$ — некоторое зафиксированное решение* (*частное решение*) *неоднородного соотношения* 5. *Тогда справедливо равенство*

$$X^{\text{он}} = X^{\text{оо}} + \left\{x_n^{\text{чн}}\right\}.$$

Доказательство. Сначала разберемся с сутью равенства из формулировки теоремы. В левой части равенства, понятно, указано множество всех последовательностей, удовлетворяющих соотношению 5, а что указано в правой части?

На самом деле, в правой части находится множество всех последовательностей, каждая их которых может быть представлена в виде поэлементной суммы двух последовательностей, первая из которых является некоторым решением однородного соотношения, а вторая — фиксированное решение неоднородного соотношения. Следовательно, нужно доказать равенство двух множеств. Для этого достаточно доказать, что любой элемент первого множества содержится во втором множестве и наоборот (в качестве иллюстрации можно вспомнить решение примера **??**).

Пусть $\{x_n\} \in X^{\text{ОН}}$, т.е. последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет при всех целых неотрицательных n соотношениям

$$x_{n+k} - u_1 x_{n+k-1} - \ldots - u_{k-1} x_{n+1} - u_k x_n = f(n).$$

Кроме того, по условию фиксированная последовательность $\left\{x_n^{\text{ЧН}}\right\}$ уловлетвляет таким же соотношениям:

$$x_{n+k}^{\text{ЧН}} - u_1 x_{n+k-1}^{\text{ЧН}} - \ldots - u_{k-1} x_{n+1}^{\text{ЧН}} - u_k x_n^{\text{ЧН}} = f(n).$$

Вычитая эти соотношения друг из друга, имеем:

$$\left(x_{n+k} - x_{n+k}^{\text{ЧН}}\right) - u_1\left(x_{n+k-1} - x_{n+k-1}^{\text{ЧН}}\right) - \ldots - u_{k-1}\left(x_{n+1} - x_{n+1}^{\text{ЧН}}\right) - u_k\left(x_n - x_n^{\text{ЧН}}\right) = 0.$$

Определяя последовательность $\{y_n\}$ равенствами

$$y_n = x_n - x_n^{\text{ЧН}}, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

получаем, что $x_n = y_n + x_n^{\text{ЧН}}$, где $\{y_n\} \in X^{\text{ОО}}$. Поэтому последовательность $\{x_n\}$ лежит в множестве $X^{\text{ОО}} + \left\{x_n^{\text{ЧН}}\right\}$.

Теперь, наоборот, рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}$, принадлежащую множеству $X^{\text{ОО}} + \left\{x_n^{\text{ЧН}}\right\}$. Тогда эта последовательность представима в виде

$$x_n = y_n + x_n^{\text{ЧН}}, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

где $\{y_n\}$ — некоторая последовательность, принадлежащая множеству $X^{\text{ОО}}$ и, следовательно, удовлетворяющая соотношениям

$$y_{n+k} - u_1 y_{n+k-1} - \ldots - u_{k-1} y_{n+1} - u_k y_n = n.$$

Последовательность $\left\{x_n^{\text{ЧН}}\right\}$ уловлетвляет соотношениям

$$x_{n+k}^{\text{ЧН}} - u_1 x_{n+k-1}^{\text{ЧН}} - \ldots - u_{k-1} x_{n+1}^{\text{ЧН}} - u_k x_n^{\text{ЧН}} = f(n).$$

Складывая эти равенства, получаем:

$$\left(y_{n+k} + x_{n+k}^{\text{ЧН}}\right) - u_1\left(y_{n+k-1} + x_{n+k-1}^{\text{ЧН}}\right) - \ldots - u_{k-1}\left(y_{n+1} + y_{n+1}^{\text{ЧН}}\right) - u_k\left(y_n + y_n^{\text{ЧН}}\right) = f(n).$$

Следовательно, $\{x_n\} \in X^{\text{ОН}}$. □

Таким образом, чтобы найти общее решение линейного неоднородного рекуррентного уравнения, нужно найти общее решение соответствующего однородного рекуррентного уравнения — это мы уже знаем как делать — и каким-либо образом найти, например, подобрать или даже угадать, одну любую последовательность, удовлетворяющую исходному неоднородному соотношению. Переходим, собственно, к способу подбора такой последовательности, называемой в соответствии с теоремой 1 *частным решением.*

Сначала отметим следующий простой факт: если в рекуррентном соотношении 5 функция $f(n)$, отвечающая за неоднородность соотношения, представляется в виде суммы двух других функций, т. е. $f(n) = f_1(n) + f_2(n)$, а последовательности $\left\{x_n^{\text{чн}_1}\right\}$ и $\left\{x_n^{\text{чн}_2}\right\}$ являются частными решениями рекуррентных соотношений, получающихся из соотношения 5 путем замены функции $f(n)$ на функции $f_1(n)$ и $f_2(n)$ соответственно, то последовательность $\{x_n\}$, определяемая равенствами

$$x_n = x_n^{\text{чн}_1} + x_n^{\text{чн}_2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

будет являться решением исходного рекуррентного уравнения 5.

Действительно, так как последовательности $\left\{x_n^{\text{чн}_1}\right\}$ и $\left\{x_n^{\text{чн}_2}\right\}$ удовлетворяют равенствам

$$\begin{aligned} x_{n+k}^{\text{чн}_1} - u_1 x_{n+k-1}^{\text{чн}_1} - \ldots - u_{k-1} x_{n+1}^{\text{чн}_1} - u_k x_n^{\text{чн}_1} = f_1(n), \\ x_{n+k}^{\text{чн}_2} - u_1 x_{n+k-1}^{\text{чн}_2} - \ldots - u_{k-1} x_{n+1}^{\text{чн}_2} - u_k x_n^{\text{чн}_2} = f_2(n), \end{aligned}$$

то, складывая эти равенства, получаем, что последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению 5.

Таким образом, для отыскания частного решения неоднородного рекуррентного соотношения 5, в котором функция $f(n)$ явдяется суммой двух или нескольких слагаемых, достаточно сложить частные решения неоднородных соотношений, в которых функция $f(n)$ заменена на соответствующее слагаемое.

В общем случае, когда на вид функции $f(n)$ не накладывается никаких ограничений, к сожалению, не будет предложен способ подобрать частное решение соотношения 5. Однако, для достаточно широкого класса функций, включаещего в себя, например функции n^2, n^5, $(-2)^n$, π^n, $7^n + n^4$, $n^2 \cdot 2^{n-1} + n \cdot 6^{n+1}$, алгоритм, позволяющий подобрать частное решение, ниже будет предложен.

Функцию $f(n)$, определенную на множестве целых неотрицательных чисел, будем называть *допустимой*, если ее можно представить в виде

$$f(n) = P(n) \cdot \mu^n,$$

где $P(n)$ — многочлен от переменной n (допускается в том числе многочлен нулевой степени, т. е. просто константа), а μ — действительное (на самом деле можно и комплексное тоже) число. Приведенные несколько выше функции либо допустимые, либо являются суммами допустимых:

$$\begin{gathered} n^2 = (n^2) \cdot 1^n, \quad n^5 = (n^5) \cdot 1^n, \quad (-2)^n = (1) \cdot (-2)^n, \quad \pi^n = (1) \cdot \pi^n, \\ 7^n + n^4 = (1) \cdot 7^n + (n^4) \cdot 1^n, \quad n^2 \cdot 2^{n-1} + n \cdot 6^{n+1} = (n^2/2) \cdot 2^n + (6n) \cdot 6^n. \end{gathered}$$

Покажем как найти частное решение линейного неоднородного рекуррентного соотношения, задаваемого равенствами 5, если функция $f(n)$ является допустимой. Пусть

$$f(n) = P(n) \cdot \mu^n,$$

где $P(n)$ — многочлен степни m, $\mu \in \mathbb{R}$. Тогда частное решение $\left\{x_n^{\text{чн}}\right\}$ нужно искать в следующем виде:

$$x_n^{\text{чн}} = Q(n) \cdot \mu^n \cdot n^s, \quad n = 0, 1, 2 \ldots \tag{6}$$

где $Q(n)$ — многочлен общего вида той же степент m, что и многочлен $P(n)$, а n^s — некая «поправка», возникаюшая если число μ является корнем кратности s характеристического многочлена однородного рекуррентного соотношения, получающегося из соотношения 5 заменой функции $f(n)$ на тождественно нулевую функцию. В случае, когда μ не является корнем характеристического многочлена, условимся считать, что μ является корнем кратности 0. Такая договоренность позволяет унифицировать вид искомой последовательности.

Несколько подробнее остановимся на виде выписываемого многочлена $Q(n)$. Если, скажем, многочлен $P(n)$ имеет степень 2, то вне зависимости от того какой именно это многочлен второй степени — n^2, $100n^2 - \sqrt{3}n + 1,5$ или $-3n^2 + \pi n$ — в любом случае в качестве многочлена $Q(n)$ нужно брать многочлен второй степени общего вида, т. е. an^2+bn+c (конечно обозначения коэффициентов могут быть любые). На всякий случай еще напомним, что просто число или константа — это многочлен нулевой степени.

Возвращаясь к виду 6, в котором предполагается искать частное решение, отметим, что не будем доказывать тот факт, что среди всех решений линейного неоднородного рекурретного соотногения с допустимой функцией, отвечающей за неоднородность, найдется решение, имеющее вид 6 (все-таки это доказательство не самое простое). Будем к этому относиться так: при решении задач нам каждый раз просто будет улыбаться удача и мы будем находить частное решение неоднородного рекурретного соотношения. Когда найдена одна последовательность, удовлетворяющая неоднородному рекуррентному соотношению, уже не важно, найдена ли она с помощью какой-то хитроумной теории или случайно угадана.

Но удачу еще нужно заслужить — а именно, подставить последовательность, имеющую вид 6, в исходное линейное неоднородное рекуррентное соотношение и найти тот единственный набор коэффициентов многочлена $Q(n)$, при котором последовательность вида 6 действительно будет решением. По сути этот способ нахождения коэффициентов многочлена $Q(n)$ ничем не отличается от использованного в примере 4 для других целей метода неопределенных коэффициентов.

Проиллюстрируем описанную процедуру нахождения общего решения линейного неоднородного рекуррентного соотношения на примерах.

Пример 5. Найти все решения рекуррентного соотношения

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = n3^n.$$

Этап I: нахождение общего решения однородного уравнения

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0.$$

На самом деле это уже сделано в примере 2, но повторим соответствующие действия еще раз.

Выпишем характеристический многочлен соотношения и найдём его корни:

$$\lambda^2 - \lambda + 3 = 0;$$

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3.$$

Кратность корней равна единице и число корней равно степени характеристического многочлена, поэтому общее решение однородного рекуррентного соотношения $a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n = 0$ имеет вид

$$a_n^{\text{OO}} = c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot 3^n.$$

Этап II: поиск частного решения неоднородного уравнения

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = n3^n.$$

Функция $n \cdot 3^n$, «отвечающая» за неоднородность уравнения, является допустимой, так как является произведением многочлена n первой степени и экспоненты 3^n. Основание 3 этой экспоненты является корнем кратности 1 для характеристического многочлена, выписанного на этапе I. Поэтому частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$a_n^{\text{чн}} = (an + b) \cdot 3^n \cdot n^1 = (an^2 + bn)3^n.$$

Подставляя эту последовательность в исходное рекуррентное соотношение и учитывая, что

$$a_{n+1}^{\text{чн}} = (a(n+1)^2 + b(n+1))3^{n+1}, \quad a_{n+2}^{\text{чн}} = (a(n+2)^2 + b(n+2))3^{n+2},$$

получаем:

$$(an^2 + 4an + 4a + bn + 2b)3^{n+2} - 4(an^2 + 2an + a + bn + b)3^{n+1} + 3(an^2 + bn)3^n = n3^n.$$

Сокращая левую и правую части равенства на 3^n, раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, имеем[3]:

$$12an + 24a - 6b = n.$$

В последнем равенстве слева и справа стоят многочлены от переменной n. при этом равенство должно выполняться при любых целых неотрицательтных значениях n. Это возможно только в случае, когда при каждой степени коэффициенты многочленов из обеих частей совпадают. Приравнивая свободные члены и коэффициенты при n^1, получаем систему

$$\begin{cases} 12a + 6b = 0 \\ 12a = 1 \end{cases},$$

решением которой будет пара значений

$$a = \frac{1}{12}, \quad b = -\frac{1}{6}.$$

Таким образом, найдено одно решение

$$a_n^{\text{чн}} = \frac{(n^2 - 2n)3^{n-1}}{4}$$

исходного неоднородного рекуррентного соотношения и тем самым этап II завершен.

Теперь в соответствии с теоремой 1 выписываем общее решение исходного уравнения:

$$a_n^{\text{он}} = c_1 + c_2 3^n + \frac{(n^2 - 2n)3^{n-1}}{4}$$

[3] В силу домножения при определении вида частного решения на «поправку» n, в левой части равенства формально должен получиться многочлен на единицу большей степени, чем многочлен в правой части. Однако это не произошло — коэффициент при старшей степени оказался нулевым. На самом деле это неслучайно — при наличии «поправки» вида n^s при поиске вида частного решения после подстановки в исходное рекуррентное соотношение предполагаемого решения в случае отсутствия ошибок в выкладках, s старших степеней после приведения подобных слагаемых должны получить нулевые коэффициенты.

Пример 6. Найти решение рекуррентного соотношения

$$x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = n2^n + n^2,$$

удовлетворяющее начальным условиям $x_0 = 1$, $x_1 = 1$.

Этап I: нахождение общего решения однородного уравнения

$$x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0.$$

Выпишем характеристический многочлен соотношения и найдём его корни:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0;$$
$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2.$$

Кратность корней равна единице и число корней равно степени характеристического многочлена, поэтому общее решение однородного рекуррентного соотношения $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0$ имеет вид

$$x_n^{\text{ОО}} = c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot 2^n.$$

Переходя к поиску частного решения исходного неоднородного уравнения, отметим, что функция $n2^n + n^2$ не является допустимой, но, очевидно, может быть представлена в виде суммы дыух допустимых функций. Поэтому частное решение будем отдельно искать для рекуррентных соотношений, в которых за неоднородность «отвечает» по очереди каждое из этих слагаемых.

Этап II: поиск частного решения неоднородного уравнения

$$x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = n2^n.$$

Функция $n \cdot 2^n$, является допустимой, так как является произведением многочлена n первой степени и экспоненты 2^n. Основание 2 этой экспоненты является корнем кратности 1 для характеристического многочлена, выписанного на этапе I. Поэтому частное решение текущего неоднородного уравнения будем искать в виде

$$x_n^{\text{ЧН}_1} = (an + b) \cdot 2^n \cdot n^1 = (an^2 + bn)2^n.$$

Подставляя эту последовательность в исходное рекуррентное соотношение и учитывая, что

$$x_{n+1}^{\text{ЧН}_1} = (a(n+1)^2 + b(n+1))2^{n+1}, \quad x_{n+2}^{\text{ЧН}_1} = (a(n+2)^2 + b(n+2))2^{n+2},$$

получаем:

$$(an^2 + 4an + 4a + bn + 2b)2^{n+2} - 3(an^2 + 2an + a + bn + b)2^{n+1} + 2(an^2 + bn)3^n = n2^n.$$

Сокращая левую и правую части равенства на 2^n, раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, имеем:

$$4an + 10a + 2b = n.$$

Приравнивая свободные члены и коэффициенты при n^1, получаем систему

$$\begin{cases} 10a + 2b = 0 \\ 4a = 1 \end{cases},$$

решением которой будет пара значений

$$a = \frac{1}{4}, \quad b = -\frac{5}{4}.$$

Таким образом, найдено одно решение

$$x_n^{\text{чн}_1} = \frac{n^2 - 5n}{4} \cdot 2^n$$

первого неоднородного рекуррентного соотношения и тем самым этап II завершен.

Этап III: поиск частного решения неоднородного уравнения

$$x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = n^2.$$

Функция n^2, является допустимой, так как является произведением многочлена n^2 второй степени и экспоненты 1^n. Основание 1 этой экспоненты является корнем кратности 1 для характеристического многочлена, выписанного на этапе I. Поэтому частное решение текущего неоднородного уравнения будем искать в виде

$$x_n^{\text{чн}_2} = (an^2 + bn + c) \cdot 1^n \cdot n^1 = an^3 + bn^2 + cn.$$

Подставляя эту последовательность в исходное рекуррентное соотношение и учитывая, что

$$x_{n+1}^{\text{чн}_2} = a(n+1)^3 + b(n+1))^2 + c(n+1), \quad x_{n+2}^{\text{чн}_2} = a(n+2)^3 + b(n+2))^2 + c(n+2),$$

получаем:

$$a(n+2)^3 + b(n+2))^2 + c(n+2) - 3(a(n+1)^3 + b(n+1))^2 + c(n+1)) + 2(an^3 + bn^2 + cn) = n^2.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, имеем:

$$-3an^2 + 3an - 2bn + 5a + b - 2c = n^2.$$

Приравнивая свободные члены, коэффициенты при n и при n^2, получаем систему

$$\begin{cases} 5a + b - 2c = 0; \\ 3a - 2b = 0; \\ -3a = 1, \end{cases}$$

решением которой будет следующий набор значений коэффмцментов:

$$a = -\frac{1}{3}, \quad b = -\frac{1}{2}, \quad c = -\frac{13}{6}.$$

Таким образом, найдено одно решение

$$x_n^{\text{чн}_2} = -\frac{2n^3 + 3n^2 + 13n}{6}$$

второго неоднородного рекуррентного соотношения и тем самым этап III завершен.

Теперь в соответствии с теоремой 1 выписываем общее решение исходного уравнения:

$$x_n^{\text{он}} = c_1 + c_2 \cdot 2^n + \frac{n^2 - 5n}{4} \cdot 2^n - \frac{2n^3 + 3n^2 + 13n}{6}.$$

Подставляя начальные условия, получаем соотношения:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1; \\ c_1 + 2c_2 + \dfrac{1-5}{4} \cdot 2 - \dfrac{2+3+13}{6} = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1; \\ c_1 + 2c_2 = 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -4; \\ c_2 = 5. \end{cases}$$

Таким образом, решением исходного рекуррентного соотношения является последовательность, задаваемая равенствами

$$x_n^{\text{он}} = -4 + 5 \cdot 2^n + \frac{n^2 - 5n}{4} \cdot 2^n - \frac{2n^3 + 3n^2 + 13n}{6} = \frac{n^2 - 5n + 20}{4} \cdot 2^n - \frac{2n^3 + 3n^2 + 13n + 24}{6}.$$

Заметим, что при нахождении множества всех последовательностей, удовлетворяющих рекуррентному соотношению из примера 6, ни на одном из трех основных этапов не решалась исходная задача, а решались в том или ином смысле близкие к ней задачи.