

1 Предварительные соображения и определения

Комбинаторика — это раздел дискретной математики, связанный с исследованием задач по выбору, подсчету и расположению элементов с определенными свойствами из некоторого (чаще всего конечного) множества в соответствии с заданными правилами или наложенными условиями.

1.1 Правило суммы и правило произведения

Пусть множество A содержит n элементов (то есть выбрать один элемент из множества A можно n способами), а множество B — m элементов (то есть выбрать один элемент из множества B можно m способами), причём множества A и B не пересекаются (не имеют общих элементов).

Правило суммы заключается в том, что из множества $A \cup B$ один элемент можно выбрать $n + m$ способами. Оно основано на том, что в множестве $A \cup B$ содержится ровно $n + m$ различных элементов. Другими словами, если элемент a можно выбрать n способами, а элемент b — m способами, то выбор «либо a , либо b » можно осуществить $n + m$ способами.

Пример 1. В группе 6 юношей и 15 девушек, нужно выбрать старосту. Это можно сделать $6 + 15 = 21$ способом.

Правило произведения заключается в том, что из множества $A \times B$, то есть множества пар вида (a, b) , где a — элемент множества A , а b — элемент множества B , элемент (пару (a, b)) можно выбрать $n \cdot m$ способами. Оно основано на том, что число таких пар $n \cdot m$. Другими словами, если элемент a можно выбрать n способами, а элемент b — m способами, то пару (a, b) можно выбрать $n \cdot m$ способами.

Пример 2. В группе 6 юношей и 15 девушек, нужно выбрать пару «юноша и девушка» среди присутствующих. Это можно сделать $6 \cdot 15 = 90$ способами.

Пример 3. В столовой продают два вида чая, три вида кофе, компот и 7 видов выпечки. Студентка собирается перекусить напитком с булочкой из ассортимента столовой. Она может выбрать перекус $(2 + 3 + 1) \cdot 7 = 42$ способами.

Пример 4. В шкафу висит 3 пары брюк, 2 юбки и 4 кофточки. Из них можно составить $(3 + 2) \cdot 4 = 20$ различных комплектов одежды.

1.2 Факториал

Факториалом натурального числа n называется произведение всех натуральных чисел от 1 до n . Для факториала числа n используется обозначение $n!$, при этом оказывается удобным считать, что по определению $0! = 1$.

В качестве примера использования математической индукции не для доказательства, дадим эквивалентное определение факториала.

База индукции ($n = 0$): $0! = 1$.

Шаг индукции ($n - 1 \mapsto n$): $n! = n \cdot (n - 1)!$.

Пусть k, n — натуральные числа, $k < n$. Запишем произведение k идущих подряд натуральных чисел, начиная с числа $n - k + 1$:

$$(n - k + 1) \cdot (n - k + 2) \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n - k - 1) \cdot (n - k)} = \frac{n!}{(n - k)!}.$$

Как видим, такое произведение можно короче записывать при помощи знаков факториала.

2 Определения и простейшие свойства основных комбинаторных объектов. Выборки из n -элементного множества k элементов

С чего начинается комбинаторика? В каком-то смысле она начинается с ответа на вопрос: сколькими способами можно среди n элементов выбрать k элементов? На самом деле это не один вопрос, а четыре — выборка бывает упорядоченной и неупорядоченной, повторное использование элемента может допускаться, а может не допускаться. Упорядоченные выборки называются *размещениями* или *наборами*, а неупорядоченные — *сочетаниями*. Как правило, по умолчанию под выборкой понимается выборка без повторений, а если речь идет о выборке с повторениями, то это оговаривается явным образом.

Пусть M_n — множество, содержащее n элементов. Ответить на вопрос «сколькими способами можно выбрать k элементов из множества M_n » мы не можем, пока не сделаем два уточнения. Во-первых, в выборке могут быть как разрешены повторения элементов, так и запрещены. Во-вторых, в выборке может быть важен порядок элементов, а может быть не важен. Таким образом, получаем четыре разные задачи, которые разберём ниже.

2.1 Упорядоченные выборки с повторениями (размещения с повторениями).

Рассмотрим выборки, в которых элементы упорядочены и могут повторяться. Такие выборки называются *размещениями* (или *наборами*) *с повторениями*. Классическими примерами таких выборок являются числа — выборки цифр и слова — выборки букв. Здесь и далее под *словом* над заданным множеством букв (алфавитом) будем понимать произвольную (необязательно осмысленную) конечную последовательность букв из данного множества. Соответственно, под *числом* будем понимать непустое слово над алфавитом $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Пример 5. Сколько существует слов длины 10, состоящих из букв А, Т, Г, Ц?

Существует 4 слова длины 1. К каждому такому слову можем приписать одну из 4 букв. Согласно правилу умножения получаем 16 различных слов (4 варианта «первой буквы» и 4 варианта «второй буквы»). Аналогичным образом получаем, что существует 4^3 слов длины 3, 4^4 слов длины 4, и так далее¹. Таким образом, существует $4^{10} = 1\,048\,576$ слов длины 10, состоящих из букв А, Т, Г, Ц.

¹Здесь специально стоит фраза «и так далее», которая при абсолютно строгом изложении должна быть заменена на простое доказательство по индукции.

Отметим, что буквы в словах могут повторяться, а слова, отличающиеся порядком расположения букв, являются разными словами.

Теперь обобщим этот пример и посчитаем количество упорядоченных выборок с повторениями k элементов из множества, состоящего из n элементов. Индукцией по параметру k покажем, что число способов выбрать k упорядоченных элементов повторениями из n равно n^k .

База индукции. Если $k = 0$, то существует только один способ выбрать 0 элементов из n : $1 = n^0$ — верно. Может быть, кого-нибудь смутит подсчет количества способов выбрать 0 элементов. Давайте на всякий случай проверим истинность доказываемого утверждения и для случая $k = 1$. Если $k = 1$, то существует n способов выбрать 1 элемент из n : $n = n^1$ — верно.

Индуктивный переход. Пусть число способов выбрать k упорядоченных элементов с повторениями из n равно n^k . Посчитаем число способов выбрать $k + 1$ упорядоченный элемент из n с повторениями. Число способов выбрать первые k элементов равно n^k , число способов выбрать $(k + 1)$ -й элемент равно n . Применяя правило произведения, получаем, что число способов выбрать $k + 1$ упорядоченный элемент из n с повторениями равно n^{k+1} .

Пример 6. Пусть у нас имеются 20 различных карандашей и 7 разных, например, пронумерованных, ящиков. Сколькими способами можно разложить карандаши по ящикам? Первый карандаш можно положить в любой из семи ящиков, то есть первый карандаш можем положить семью способами, второй — тоже в любой из семи ящиков, то есть это можем сделать также семью способами. А значит, два карандаша можем положить в 7 ящиков $7 \times 7 = 49$ способами. И так каждый карандаш можно положить в любой из семи ящиков, то есть семью способами. Таким образом получаем, что всего имеется

$$\underbrace{7 \cdot \dots \cdot 7}_{20 \text{ раз}} = 7^{20} = 79\,792\,266\,297\,612\,001 \approx 8 \cdot 10^{16}$$

способов разместить 20 карандашей по 7 ящикам.

Обратите внимание, что в данном случае нет упорядочения в «бытовом» смысле. Роль порядка тут играет то, что карандаши различны а значит, поменяв местами карандаши в ящиках, мы получим разные раскладки карандашей.

Пример 7. Сколько существует способов раскрасить 15 различных предметов в 10 цветов. Каждый предмет можно раскрасить в любой из k цветов, то всего существует

$$\underbrace{10 \cdot \dots \cdot 10}_{15 \text{ раз}} = 10^{15}$$

способов раскрасить 15 различных предметов в 10 цветов.

Пример 8. Множество A содержит n элементов. Сколько существует подмножеств множества A ? Пусть B — подмножество множества A . Про каждый элемент из множества A мы можем сказать, содержится ли он в множестве B или не содержится, то есть каждый элемент множества A может находиться в одном из двух состояний ($x \in B$ и $x \notin B$). А значит, существует 2^n различных вариантов множества B или 2^n подмножеств множества A .

2.2 Упорядоченные выборки без повторений (размещения).

Пример 9. В гостинице 15 одноместных номеров. Сколько способов существует расселить 5 постояльцев по этим номерам (каждый постоялец собирается жить в отдельном одноместном номере). Первого постояльца можно поселить в одну из 15 комнат, второго — в одну из 14 оставшихся свободных, третьего — в одну из 13, четвертого — в одну из 12, пятого — в одну из 11. Поэтому всего существует $15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 = 360\,360$ способов расселить 5 постояльцев в 15 одноместных номеров.

На каждом шаге мы выбирали одну комнату из свободных, при этом на каждом шаге свободных комнат становилось на одну меньше.

Обобщим этот пример. Будем отвечать на вопрос, сколькими способами можно выбрать k упорядоченных элементов из n без повторений. Аналогично предыдущему случаю, используя метод математической индукции, нетрудно показать, что число таких способов $\frac{n!}{(n-k)!}$. Отличие заключается в том, что в индуктивном переходе от k к $k+1$, $(k+1)$ -й элемент выбирается $n-k$ способами.

Пример 10. Пусть у нас имеется 10 различных новогодних подарков и 15 различных подарочных пакетов. Любой подарок можно положить в любой пакет, в каждый пакет можно класть не более одного подарка. Сколько существует способов упаковать подарки?

Как и в предыдущих задачах, первый подарок можно положить в любой из 15 пакетов. Для второго подарка останется на выбор 14 пакетов. Для третьего — 13, для последнего — 6. Таким образом, существует $15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \dots \cdot 6 = 10\,897\,286\,400 \approx 10^{10}$ способов упаковать подарки. Используя обозначение факториала, это значение можно записать следующим образом.

$$15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \dots \cdot 6 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \dots \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 1} = \frac{15!}{5!}.$$

2.3 Перестановки

Отдельно стоит выделить частный случай размещений — размещения без повторений в случае, когда $k = n$. Упорядоченная выборка без повторений n элементов из множества, состоящего из n элементов, называется *перестановкой* n элементов.

Пример 11. На карточках написаны числа от 1 до 7. Посмотрим, сколькими способами можно выложить эти карточки в ряд. На первое место можно поместить одну из семи карточек. На второе — одну из шести, ..., на предпоследнее — одну из двух, на последнее — одну оставшуюся карточку. Таким образом, всего существует $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7! = 5040$ способов выложить 7 карточек в ряд.

В общем случае мы отвечаем на вопрос: сколькими способами можно упорядочить n элементов (пронумеровать их)? На первое место можно поместить любой из n предметов, на второе — любой из оставшихся $n-1$ предметов, ..., на k -е место можно поместить любой из оставшихся $n-k+1$ предметов, ..., на последнее — один оставшийся предмет. А значит, всего существует $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ способов упорядочить n различных предметов.

Пример 12. В столовую пришли 22 студента. Сколькими способами они могут встать в очередь? В соответствии с рассуждениями, аналогичными предыдущим, получаем

$$22! = 1\,124\,000\,727\,777\,607\,680\,000 \approx 10^{21}$$

способов.

2.4 Неупорядоченные выборки без повторений (сочетания).

Пример 13. В классе 25 человек. Сколькими способами можно выбрать 5 человек для дежурства?

В данной задаче нам не важен порядок, в котором эти 5 человек выбираются. Однако для решения данной задачи воспользуемся результатами, полученными выше. Обозначим число способов, которыми можно выбрать 5 человек для дежурства, через A .

Посчитаем по-разному, сколькими способами можно выбрать 5 человек из класса и построить их по-очереди (например, на дежурство надо отпустить пораньше с урока, но перед этим надо у всех посмотреть тетради, сделать это можно в разном порядке). С одной стороны, мы можем выбрать 5 человек из класса в заданном порядке. Как показано выше, число способов в этом случае получается $\frac{25!}{20!}$. С другой стороны, мы можем выбрать 5 дежурных A способами, а потом пронумеровать их $5!$ способами. Таким образом получаем:

$$\frac{25!}{20!} = A \cdot 5!, \text{ а значит } A = \frac{25!}{20! \cdot 5!}.$$

Обобщим эту задачу. Пусть у нас имеется n предметов, нам нужно выбрать k из них. Если бы был важен порядок предметов (например, книги на полке), то было бы $\frac{n!}{(n-k)!}$ способов сделать выбор. Поскольку k предметов можно упорядочить $k!$ способами, то каждой неупорядоченной выборке из k предметов соответствует $k!$ упорядоченных наборов. А значит, существует $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ способов выбрать k элементов из n .

Другими словами, одной неупорядоченной выборке k элементов без повторений соответствует $k!$ упорядоченных выборок без повторений, то число сочетаний из n элементов по k элементов, обозначаемое C_n^k , при $n \geq k \geq 0$ равно

$$\frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Пример 14. На полке стоит 15 различных книжек, а в сумку помещаются только 3. Сколькими способами можно взять 3 книжки с полки (в сумку)?

Предположим сначала, что расположение (порядок) книжек в сумке важен. Тогда первую книжку мы можем взять одну из 15, вторую — одну из 14, третью — одну из оставшихся 13. То есть всего $15 \cdot 14 \cdot 13$ способов. Пусть мы взяли книжки A, B, C . Если они у нас лежат в сумке «кучей», то упорядочить мы их можем $3! = 6$ способами. Значит, каждому беспорядочному набору из 3 книжек соответствует 6 упорядоченных наборов. Важно отметить, что разным неупорядоченным наборам соответствуют разные упорядоченные наборы. Число упорядоченных наборов мы знаем, поэтому получаем, что число «кучек» равно

$$\frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 455.$$

Пример 15. Сколько существует последовательностей из 0 и 1 длины n , содержащих k нулей и $n - k$ единиц?

На первый взгляд кажется, что в задаче спрашивается об «упорядоченных» последовательностях. Однако, выбираем в данном случае мы не 0 и 1 для каждого места, а позиции, на которых будут располагаться одинаковые цифры. Причём не имеет значение, какие: если выберем места для нулей, на остальных автоматически будут расположены единицы, и наоборот, если выберем места для единиц, на остальных автоматически расположатся нули. Таким образом, существует $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ последовательностей длины n , содержащих k нулей и $n - k$ единиц.

2.5 Неупорядоченные выборки с повторениями (сочетания с повторениями).

Пример 16. Преподаватель берёт перед занятиями 10 маркеров. Они могут быть красными, синими, черными и зелеными. Сколько способов взять набор из 10 маркеров существует? Все маркеры одного цвета одинаковые.

Давайте возьмем 10 маркеров и разложим по 4 «ящикам с краской». У нас получится примерно следующее:

$$\underbrace{|\text{ooo}|}_{\text{к}} \underbrace{|\text{oo}|}_{\text{с}} \underbrace{|\text{oo}|}_{\text{ч}} \underbrace{|\text{ooo}|}_{\text{з}}$$

или так:

$$\underbrace{|\text{ooooo}|}_{\text{к}} \underbrace{|\text{ }|}_{\text{с}} \underbrace{|\text{oooo}|}_{\text{ч}} \underbrace{|\text{o}|}_{\text{з}}$$

или даже так (все-таки черный цвет маркера на лекции предпочтителен):

$$\underbrace{|\text{ }|}_{\text{к}} \underbrace{|\text{ }|}_{\text{с}} \underbrace{|\text{oooooooo}|}_{\text{ч}} \underbrace{|\text{ }|}_{\text{з}}.$$

В любом случае у нас имеется 10 маркеров и 3 «разделителя по цветам» (крайние вертикальные палочки положения не меняют), которые мы и располагаем на 13 последовательных местах. А значит, нам надо выбрать из 13 мест 3 для «разделителей», а остальные заполнить «маркерами-кружочками» единственным способом. Сделать это можно $C_{13}^3 = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2} = 286$ способами.

Обобщим этот пример. Пусть у нас имеется n элементов, мы выбираем k из них, при этом порядок не важен, повторения допускаются. Сколькими способами можно это сделать? Построим взаимно однозначное соответствие между способами выбрать k неупорядоченных предметов из n с повторениями и последовательностями, содержащими k нулей и $n - 1$ единицу, а количество таких последовательностей уже известно, как считать (см. пример 15). Для удобства будем считать, что элементами множества являются числа от 1 до n . Обозначим через k_1 количество единиц, через k_2 — количество двоек, ..., через k_i — количество чисел i , $k_i \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Нетрудно видеть, что $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$. Этой выборке поставим в соответствие последовательность из 0 и 1, в которой сначала идут k_1 нулей, а затем последовательно для $i = 2, \dots, n$ расположены наборы, состоящие из единицы и стоящих за ней k_i нулей:

$$\underbrace{0 \dots 0 1}_{k_1} \underbrace{0 \dots 0 1}_{k_2} \dots 1 \underbrace{0 \dots 0}_{k_n}.$$

Таким образом, число искомых выборов равно числу C_{n+k-1}^k сочетаний из $n + k - 1$ элементов по k элементов, т. е. числу

$$\frac{(n + k - 1)!}{(n - 1)! k!}.$$

Сведём имеющиеся результаты в таблицу. Пусть у нас есть множество из n элементов. Тогда число способов выбрать k элементов из n считается следующим образом, в зависимости от того, упорядоченная ли выборка и допускаются ли в ней повторения элементов.

	с повторениями	без повторений
упорядоченные	n^k	$\frac{n!}{(n - k)!}$
неупорядоченные	$C_{n+k-1}^k = \frac{(k + n - 1)!}{k!(n - 1)!}$	$C_n^k = \frac{n!}{(n - k)!k!}$

2.6 Ещё примеры

Большой класс комбинаторных задач решается с помощью правила суммы, правила произведения, а также четырёх приведённых выше формул в различных сочетаниях. Рассмотрим ещё несколько примеров, в которых эти способы сочетаются.

Пример 17. В столовую пришли 14 девушек и 8 юношей и стали выстраиваться в очередь. Сколькими способами они могут это сделать, если молодые люди решили пропустить всех девушек вперёд? Тогда очередь распадается на две части. Сначала упорядочиваем всех девушек $14!$ способами, а потом всех юношей $8!$ способами. Используя правило произведения, получаем, что выстроить существует

$$14! \cdot 8! = 87\,178\,291\,200 \cdot 40\,320 = 3\,515\,028\,701\,000\,000 \approx 3.5 \cdot 10^{15}$$

способов выстроиться в очередь таким образом.

Пример 18. Посчитаем теперь способы поставить нашу группу из 22 человек другим способом. Теперь будем выбирать не следующего человека, которого ставим в очередь, а место в очереди для следующего человека, а люди пусть у нас как-то уже занумерованы. Первого человека можем поставить к кассе и все. Второго — либо перед первым, либо после. Третьего — к кассе, между двумя предыдущими или в конец. При этом каждый следующий человек делит «свой кусочек очереди» на две части. Поэтому k -го человека можно поставить на k мест. Следовательно, и при таком способе подсчета вариантов имеем $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n = n!$.

Пример 19. Пусть в столовой открылась вторая и третья кассы. Теперь первого человека можем поставить в одну из 3 касс — три способа. Второго — либо в одну из двух пустых касс, либо в кассу, где стоит первый, причем двумя способами: до или после него. Также как и в предыдущем примере, каждый человек делит «свой кусочек очереди» на две части. А значит, для каждого следующего человека существует на один вариант постановки больше, чем для предыдущего. В результате получаем, что существует

$$\begin{aligned} 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24}{1 \cdot 2} = \\ &= \frac{24!}{2!} = 620\,448\,401\,733\,239\,439\,360\,000 \approx 6 \cdot 10^{23} \end{aligned}$$

способов поставить 22 человека в 3 кассы.

Обобщим этот пример. Теперь мы хотим поставить n человек в k касс. Первого человека можем поставить в любую из k касс. Также как и в предыдущих случаях, Также как и в предыдущем примере, каждый человек делит «свой кусочек очереди» на две части. А значит, для каждого следующего человека существует на один вариант постановки больше, чем для предыдущего. В результате получаем, что существует

$$\begin{aligned} k(k+1)(k+2) \cdot \dots \cdot (n+k-1) &= \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k-1)k(k+1)(k+2) \cdot \dots \cdot (n+k-1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k-1)} = \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!} \end{aligned}$$

способов поставить n человек в k очередей.

Пример 20. Посчитаем, сколькими способами можно расставить 7 книг на 3 полках. В данном случае нам порядок важен, поэтому задача похожа на расстановку людей в очереди. В таком случае получаем

$$3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 8 \cdot 9 = \frac{9!}{2} = 181\,440$$

способов расставить 7 книг на 3 полках.

2.7 Свойства биномиальных коэффициентов

2.7.1 Свойства сочетаний без повторений

.

										1									
									1		1								
								1		2		1							
							1		3		3		1						
						1		4		6		4		1					
					1		5		10		10		5		1				
				1		6		15		20		15		6		1			
			1		7		21		35		35		21		7		1		
		1		8		28		56		70		56		28		8		1	
	1		9		36		84		126		126		84		36		9		1
1		10		45		120		210		252		210		120		45		10	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

2.7.2 Свойства сочетаний с повторениям.

1. Число неотрицательных целочисленных решений уравнения

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n = k$$

равно числу сочетаний с повторениями из n элементов по k элементов, т. е. равно C_{n+k-1}^k .

2. Число монотонных отображений²⁾ из множества $\{1, 2, \dots, k\}$ в множество $\{1, 2, \dots, n\}$ равно числу сочетаний с повторениями из n элементов по k элементов, т. е. равно C_{n+k-1}^k .

▷ Между множеством из всех C_{n+k-1}^k двоичных наборов длины $n + k - 1$ с k единицами и множеством монотонных отображений из множества $\{1, 2, \dots, k\}$ в множество $\{1, 2, \dots, n\}$ следующим образом установим взаимно однозначное соответствие. Пусть в наборе длины $n + k - 1$ с k единицами число нулей до первой единицы равно r_1 , число нулей, расположенных между единицами с номерами $i - 1$ и i , $i = 2, \dots, k$, равно r_i :

$$\underbrace{0 \dots 0}_{r_1} 1 \underbrace{0 \dots 0}_{r_2} 1 \dots 1 \underbrace{0 \dots 0}_{r_k} 1 0 \dots 0.$$

Соответствующее этому набору монотонное отображение f из множества $\{1, 2, \dots, k\}$ в множество $\{1, 2, \dots, n\}$ задается таким образом:

$$f(s) = 1 + \sum_{i=1}^s r_i, \quad s = 1, 2, \dots, k.$$

Легко понять, что и по монотонному отображению исходный набор восстанавливается однозначно. $\square$

3. Для любого натурального n при $0 < |x| < 1$ справедливо равенство

$$(1 - x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^k x^k.$$

▷ Установим коэффициент при слагаемом x^k после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых в выражении

$$\underbrace{(1 + x + x^2 + \dots) \dots (1 + x + x^2 + \dots)}_{n \text{ раз}}.$$

²⁾ Отображение f называется *монотонным*, если для любых a и b из области определения отображения f из неравенства $a \leq b$ следует неравенство $f(a) \leq f(b)$.

Если какое-либо выражение в скобках не дает «вклад» в конкретное слагаемое x^k , то считаем, что это выражение не входит в выборку, а если дает вклад x^s , $1 \leq s \leq k$, то — входит с кратностью s . Тогда коэффициент при x^k совпадает с числом сочетаний с повторениями из n элементов по k элементов. $\square$

Теперь преобразуем выражение из свойства 3 сочетаний с повторениями следующим образом:

$$\begin{aligned}(1-x)^{-n} &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+k-1)(n+k-2)\dots n}{k!} x^k = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-n)(-n-1)\dots(-n-k+1)}{k!} (-x)^k.\end{aligned}$$

Таким образом, формулы из свойства 5 сочетаний и из свойства 3 сочетаний с повторениями являются частными случаями известного из курса математического анализа и справедливого для любого действительного α при $0 < |x| < 1$ разложения

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k,$$

где

$$\binom{\alpha}{0} = 1; \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Очевидно, что для всех целых неотрицательных n и k верно равенство

$$C_n^k = \binom{n}{k}.$$

3 Формула включений-исключений

Для начала разберём задачу:

Пример 21. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся ни на одно из чисел 2, 3, 5 и 7.

Для решения этой задачи посчитаем все числа, которые делятся хотя бы на одно из чисел 2, 3, 5 и 7, а потом вычтем это количество из 1000. Для начала посчитаем, сколько положительных чисел, не превосходящих 1000, делится на 2, 3, 5 и 7 по-отдельности:

$$N_2 = \left\lfloor \frac{1000}{2} \right\rfloor = 500; \quad N_3 = \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor = 333; \quad N_5 = \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor = 200; \quad N_7 = \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor = 142.$$

Если мы будем считать сумму этих чисел, то некоторые числа (например, 6, 10, 14, 30) будут посчитаны несколько раз. Чтобы учесть это, посчитаем количество чисел, которые делятся на 2 числа:

$$\begin{aligned}N_{23} &= \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor = 166; & N_{25} &= \left\lfloor \frac{1000}{10} \right\rfloor = 100; & N_{27} &= \left\lfloor \frac{1000}{14} \right\rfloor = 71; \\ N_{35} &= \left\lfloor \frac{1000}{15} \right\rfloor = 66; & N_{37} &= \left\lfloor \frac{1000}{21} \right\rfloor = 47; & N_{57} &= \left\lfloor \frac{1000}{35} \right\rfloor = 28.\end{aligned}$$

А также на 3 числа:

$$N_{235} = \left\lfloor \frac{1000}{30} \right\rfloor = 33; \quad N_{237} = \left\lfloor \frac{1000}{42} \right\rfloor = 23; \quad N_{257} = \left\lfloor \frac{1000}{70} \right\rfloor = 14; \quad N_{357} = \left\lfloor \frac{1000}{105} \right\rfloor = 9.$$

Наконец, на все 2, 3, 5 и 7 будет делиться $N_{2357} = \left\lfloor \frac{1000}{210} \right\rfloor = 4$ числа.

Тогда чисел, которые делятся на 2, 3, 5 и 7 будет

$$(N_2 + N_3 + N_5 + N_7) - (N_{23} + N_{25} + N_{27} + N_{35} + N_{37} + N_{57}) + \\ + (N_{235} + N_{237} + N_{257} + N_{357}) - N_{2357} = (500 + 333 + 200 + 142) - \\ (166 + 100 + 71 + 66 + 47 + 28) + (33 + 23 + 14 + 9) - 4 = 772.$$

Покажем, что в этой сумме учтено каждое число, которое делится хотя бы на одно из чисел 2, 3, 5 и 7, причём ровно по одному разу. Рассмотрим 4 случая:

1. Пусть некоторое число делится только на одно из чисел 2, 3, 5 или 7. Тогда оно будет учтено только один раз в первой скобке.
2. Пусть некоторое число делится ровно на два числа из 2, 3, 5 или 7. Пусть, например, оно делится на 3 и на 5 (остальные случаи рассматриваются аналогично). Тогда это число мы посчитаем в N_3 и в N_5 со знаком «+» и в N_{35} со знаком «-». А значит, всего оно будет учтено один раз.
3. Пусть некоторое число делится ровно на три числа из 2, 3, 5 или 7. Пусть, например, оно делится на 2, на 5 и на 7 (остальные случаи рассматриваются аналогично). Тогда это число мы посчитаем в N_2 , в N_5 и в N_7 со знаком «+», в N_{25} , N_{35} и N_{57} со знаком «-» и в N_{257} со знаком «+». Следовательно, это число будет учтено один раз.
4. Пусть некоторое число делится ровно на 2, 3, 5 и 7. Тогда это число учитывается в каждом слагаемом. В выражении 8 положительных и 7 отрицательных слагаемых, а значит, это число также будет учтено ровно один раз.

Таким образом, число целых положительных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся ни на одно из чисел 2, 3, 5 и 7, равно $1000 - 772 = 228$.

В примере 21 фактически использовалась формула включений-исключений. Рассмотрим её в общем виде.

Пусть есть N предметов и свойства $p_1, \dots, p_n$. Каждый предмет может одними свойствами обладать, а другими не обладать. Обозначим через $N_{i_1, \dots, i_k}$ количество предметов, которые обладают свойствами $p_{i_1}, \dots, p_{i_k}$ (обладание остальными свойствами — произвольное).

Через $N(r)$ обозначим число предметов, обладающих ровно r свойствами. Положим

$$S_0 = N, \quad S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} N_{i_1, \dots, i_k} \quad (k = 1, \dots, n).$$

Здесь особо отметим, что S_k — просто удобные обозначения, способствующие уменьшению громоздкости выкладок, не стоит за ними усматривать какой-то сакраментальный смысл.

Теорема 1. *Справедливо равенство*

$$N(0) = \sum_{k=0}^n (-1)^k S_k.$$

Доказательство. Покажем, что каждый предмет дает одинаковый вклад при подсчете левой и правой частей устанавливаемого равенства.

Пусть предмет не обладает ни одним свойством. Тогда вклад в левую часть будет равен 1, вклад в правую часть будет ненулевым только в слагаемое $S_0 = N$, соответствующее мощности множества всех предметов, и этот вклад тоже равен 1.

Пусть предмет обладает s свойствами, $1 \leq s \leq n$, и это свойства $p_{j_1}, \dots, p_{j_s}$. Тогда данный предмет дает ненулевой (единичный) вклад в слагаемое $N_{i_1, \dots, i_t}$ тогда и только тогда, когда верно включение

$$\{i_1, \dots, i_t\} \subset \{j_1, \dots, j_s\}.$$

Вклад этого предмета в левую часть равен нулю, а в правую —

$$\sum_{t=1}^s (-1)^t C_s^t,$$

т. е. вклад тоже нулевой.

Суммируя по всем предметам доказанные равенства вкладов в левую и правую часть, получаем справедливость исходного равенства. $\square$

Переформулируем формулу включений-исключений в терминах множеств.

Следствие. Справедливо равенство

$$\begin{aligned} |A_1 \cup \dots \cup A_n| &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \dots \\ &\dots + (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| + \dots + (-1)^{n+1} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}|. \end{aligned}$$

Пример 22 (задача о беспорядках). Найти точное значение числа подстановок σ симметрической группы S_n , удовлетворяющих условию $\sigma(i) \neq i$ для всех i , $1 \leq i \leq n$.

Что произойдет, если сумму из правой части формулы включений-исключений обобщить на каком-либо слагаемом? Оказывается, что если последнее выписанное слагаемое положительное (точнее, оно соответствует четному числу свойств), то получается оценка величины $N(0)$ сверху, а в противном случае — снизу.

Теорема 2 (Неравенства Бонферрони). Для любого l , $0 \leq l \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$

$$\sum_{k=0}^{2l+1} (-1)^k S_k \leq N(0) \leq \sum_{k=0}^{2l} (-1)^k S_k.$$

Доказательство. Для каждого из неравенств подобно доказательству формулы включений-исключений достаточно установить соответствующее неравенство для вкладов в левую и правую часть доказываемого соотношения каждого из предметов. Нужное неравенство легко следует из равенства

$$\sum_{k=0}^t (-1)^k C_n^k = (-1)^t C_{n-1}^t$$

(третье равенство свойства 6 сочетаний). □

Также аналогично формуле включений-исключений можно установить справедливость следующих утверждений.

Теорема 3. *Справедливы равенства*

$$N(r) = \sum_{k=r}^n (-1)^{k-r} \binom{k}{r} S_k,$$

$$N_{\geq r} = \sum_{k=r}^n (-1)^{k-r} \binom{k-1}{r-1} S_k,$$

где $N_{\geq r}$ — количество предметов, обладающих не менее чем r свойствами.

Пример 23. Доказать теорему 3.

Обозначим через $\varphi(m)$ функцию Эйлера, численно равную количеству натуральных чисел, не превосходящих m и взаимно простых с m .

Теорема 4. Пусть $m = p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n}$ — разложение числа m на простые множители. Тогда

$$\varphi(m) = m \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_n}\right).$$

Доказательство. Применим формулу включений-исключений, положив $N = m$ и считая i -м свойством делимость на p_i , $i = 1, \dots, n$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \varphi(m) = N(0) &= m - \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{m}{p_i} + \dots + (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \frac{m}{p_{i_1} \dots p_{i_k}} + \dots \\ &\dots + (-1)^n \frac{m}{p_1 \dots p_n} = m \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_n}\right). \end{aligned}$$

□