1 Множества

1.1 Основные определения

Понятие множества относится к первичным, неопределяемым, понятиям. В математике оно вводится сразу, когда еще нет других, более простых, понятий для их определения. Можно провести аналогию с толковым словарём, в котором получается либо «зацикленность» статей, либо какие-то слова остаются необъяснёнными. В математике такая зацикленность не принята, поэтому некоторые понятия формально не определены (например, понятия множество, число, точка, прямая и др.), но они обычно интуитивно понятны и их свойства не вызывают сомнений. Под понятием «множество» подразумевается примерно то же самое, что и под словами совокупность, семейство, неупорядоченный набор каких-либо предметов, понятий, объектов[1]. Важно, что предметы (понятия, объекты), входящие в множество, не упорядочены и не могут повторяются.

Множество, состоящее из элементов a, b и c, обозначается через $\{a, b, c\}$. Фигурные скобки говорят о том, что набор элементов a, b, c неупорядоченный. Если же речь идет об упорядоченном наборе элементов, например, о координатах точки в пространстве, то это факт отражается использованием круглых скобок: (x_0, y_0, z_0).

Предметы (понятия, объекты), входящие в множество A, называются *элементами* множества A.

Как правило, элементы множества однотипны, имеют одну природу, но может быть и не так. Например, множества могут быть сами элементами другого множества: $\big\{a, b, c, \{a, c\}, \{a, b,$

Для выражения того факта, что некоторый элемент *a принадлежит* (соответственно, *не принадлежит*) множеству A используется обозначение $a \in A$ (соответственно, $a \notin A$).

Пример 1. Рассмотрим множество студентов группы 212 образовательной программы ФиКЛ. Элементами этого множества являются студенты. При этом сама группа, например, входит в множество групп первого курса факультета гуманитарных наук. Если же мы рассмотрим, например, множество объектов, относящихся к первому курсу НИУ ВШЭ и имеющие электронные адреса, то в это множество попадут и собственно студенты группы 212, и сама группа 212 как отдельный элемент.

Как мы можем задавать или описывать множества? Выделим два способа.

Первый способ, которым мы на самом деле уже воспользовались, — это перечисление его элементов. При записи перечисляемые элементы заключаются в фигурные скобки. Отметим, что, во-первых, элементы не должны повторяться, а во-вторых, порядок перечисления элементов не имеет значения.

Пример 2.

$$A = \{\text{Петя, Вася, Маша}\}, \qquad B = \{0, 3, 15, 28\},$$
$$C = \{\text{Москва, Санкт-Петербург, Нижний Новгород, Пермь}\}.$$

Список студентов группы можно также рассматривать как задание множества всех студентов определённой группы перечислением.

[1]Понятие «множество» достаточно точно описывается английским словом «set».

Вторым способом является задание множества через такие его свойства, которые однозначно определяют само множество.

Пример 3. D — множество студентов 1 курса ФГН, посещающих курс дискретной математики;
E — множество чисел, удовлетворяющих равенству $x(x-3)(x-15)(x-28)=0$;
F — множество городов, в которых есть кампусы НИУ ВШЭ;
G — множество всех городов России;
$\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел;
$\mathbb{Q}$ — множество всех рациональных чисел[2].

На конкретном примере разберем удобный вид записи, задающий множество с помощью описания его свойств.

Пример 4. Пусть I — множество всех рациональных чисел из отрезка $[0;1]$. Это множество можно задать записью

$$I = \big\{x \mid x \in \mathbb{Q} \cap [0;1]\big\},$$

которая читается так: «I — это множество элементов x, таких, что элемент x принадлежит пересечению множества рациональных чисел и отрезка от 0 до 1».

Формально менее правильная (однако, допустимая) запись

$$I = \big\{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \leq 1\big\}$$

в чем-то более удобна и часто используется на практике. Некоторое несоотвествие формальным требованиям заключается в том, что описание свойств элементов, входящих в множество, по существу, начинается еще до вертикальной черты, заменяющей слова «такие что».

Два множества A и B считаются *равными* в том и только том случае, когда они состоят из одних и тех же элементов. Равенство множеств A и B обозначается так: $A = B$.

Пример 5. Равными являются множества B и E, а также C и F из примеров 2 и 3.

Если каждый элемент множества A является при этом и элементом множества B, то множество A называется *подмножеством* множества B (для отражения этого факта также используются следующие выражения: множество A содержится в множестве B, множество A лежит в множестве B, множество B включает множество A и др.) Будем обозначать этот факт как $A \subset B$. В случае, когда множество A является подмножеством множества B, но не совпадает с множеством B, чтобы подчеркнуть строгое включение будем использовать обозначение[3] $A \subsetneq B$.

Отметим, что знаки «$\in$» и «$\subset$» можно прочитать не только как «принадлежит» и «является подмножеством» («содержится») соответственно, но и как «лежит в» для

[2] Число является рациональным тогда и только тогда, когда его можно представить в виде дроби $\frac{p}{q}$, где p — целое число, а q — натуральное.

[3] В некоторых источниках обозначение $A \subset B$ используется в случае строго включения, а обозначение $A \subseteq B$ — для нестрогого. Таким образом при работе с литературой нужно иметь в виду, что в зависмости от опрределения, данного а источнике, запись $A \subset B$ может означать как нестрогое включение, так и строгое.

обоих знаков. Однако в каждом конкретном случае может использоваться только один из этих знаков! Элемент принадлежит множеству, а множество является подмножеством другого множества, т. е. записи

$$a \in \{a, b\}; \quad \{a\} \subset \{a, b\}.$$

являются корректными, а вот поменять местами знаки недопустимо.

Пример 6. Среди множеств из примеров 2 и 3 некоторые являются подмножествами других. Так, например, $B \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$, $C \subset G$, а также $B \subset E$, $E \subset B$.

Отметим следующие свойства включений, которые следуют напрямую из определений. Пусть A, B, C — произвольные множества.

1. Рефлексивность включений. Каждое множество является подмножеством самого себя: $A \subset A$.

2. Транзитивность включений. Если одно множество является подмножеством другого, а то, в свою очередь, является подмножеством третьего, то первое множество является подмножеством третьего: из соотношений $A \subset B$ и $B \subset C$ следует включение $A \subset C$.

3. Множества равны тогда и только тогда, когда каждое из них является подмножеством другого: равенство $A = B$ верно тогда и только тогда, когда справедливы включения $A \subset B$, $B \subset A$.

Последним свойством часто пользуются для доказательства равенства множеств. Сначала доказывают, что первое множество является подмножеством второго, а потом, что второе является подмножеством первого. В свою очередь, для доказательства включения одного множества в другое, достаточно установить, что произвольный элемент первого множества принадлежит и второму множеству.

Множество, не содержащее никаких элементов, называется *пустым* и обозначается через[4] $\varnothing$.

Отметим свойства пустого множества, следующие непосредственно из его определения.

1. Пустое множество является подмножеством любого множества A: $\varnothing \subset A$.

2. Если какое-то множество A является подмножеством пустого множества, то оно само является пустым множеством: если $A \subset \varnothing$, то $A = \varnothing$.

Пример 7. Пусть $A = \{0, 1, 2\}$. Выпишем множество всех подмножеств множества A:

$$\big\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}\{0, 1, 2\}\big\}.$$

Теперь выпишем множество подмножеств множества A, состоящих не более чем из одного элемента:

$$\big\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}\big\}.$$

[4]Отметим, что пустое множество единственное для любых задач и описаний. Например, если мы в одном случае говорим про студентов, а в другом случае — про книги, то в обоих случаях пустое множество будет одно и то же.

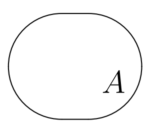
И, наконец, выпишем множество всех подмножеств множества A, состоящих менее чем из одного элемента:

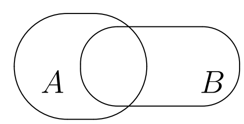
$$\{\varnothing\}.$$

Отдельно отметим, что множества $\{\varnothing\}$ и $\varnothing$ — разные множества: в первом из них есть один элемент — пустое множество, а во втором нет ни одного элемента.

В примере 7 установлено, что для множества, состоящего из 3 элементов, множество всех его подмножеств состоит из 2^3 элементов. Теперь рассмотрим более общий случай. Пусть множество A содержит n элементов. Тогда существует 2^n подмножеств множества A (включая само множество A и пустое множество). Действительно, каждый элемент множества A может содержаться в его подмножестве или не содержаться, т. е. для каждого из n элементов есть два варианта «его состояния» относительно подмножества множества A. Следовательно, всего $\underbrace{2 \times 2 \times \ldots \times 2}_{n}$ вариантов различных подмножеств.

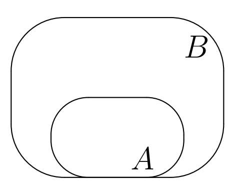
Очень полезным оказывается схематическое (графическое) изображение множеств. Для множества A рисуем некоторую фигуру (которую нам удобно, чаще всего получается некоторое подобие круга). Точки этой фигуры или некоторые точки внутри этой фигуры будут обозначать элементы множества A. Если необходимо рассматривать несколько множеств, то нужно нарисовать соответствующее число фигур.



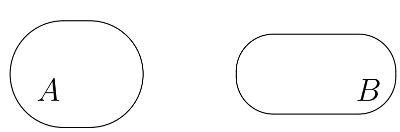


Такие изображения называются кругами Эйлера[5]. Они помогают наглядно представить себе взаимное расположение множеств и подсказать возможные пути решения.

Пример 8. Если мы знаем, что множество A является подмножеством множества B, то естественным изображением этих множеств будет примерно такое:



Если же мы знаем, что множества A и B не содержат общих элементов, то стоит так и изображать:



[5]В некоторых, особенно переводных источниках используются близкие понятия «Диаграммы Венна» или «Диаграммы Эйлера–Венна».

При всей наглядности кругов Эйлера (диаграмм Венна) их нельзя использовать для строгих доказательств (в том числе и в решении задач недостаточно приводить лишь изображение множеств кругами Эйлера).

1.2 Операции над множествами.

Объединением множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, содержащихся хотя бы в одном из множеств A или B. Объединение множеств A и B обозначается через $A \cup B$.

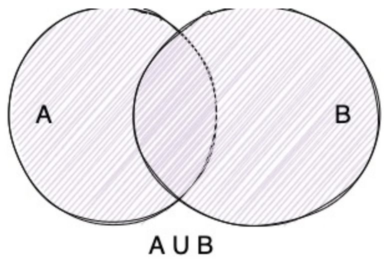


Рис. 1:

Пример 9. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$. Тогда $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11\}$.

Пересечением множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, которые одновременно принадлежат и множеству A, и множеству B. Пересечение множеств A и B обозначается через $A \cap B$. Также достаточно распространённым для пересечения множеств является обозначение AB.

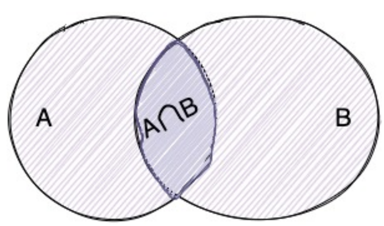


Рис. 2:

Пример 10. Пусть A — множество символов заглавных букв русского алфавита, B — множество заглавных букв английского алфавита. Тогда[6]
$A \cap B =${A, B, C, E, H, K, M, O, P, T, X}.

Разностью множеств A и B называется множество тех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B. Разность множеств A и B обозначается через $A \setminus B$. Разность множеств A и B можно записать так:

$$A \setminus B = \big\{x \mid x \in A, x \notin B\big\}.$$

[6]Для определённости считаем, что символы Y и У различны.

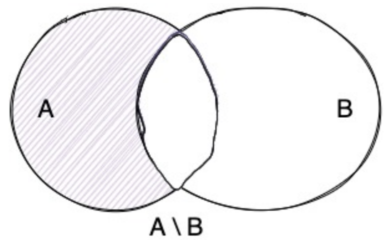


Рис. 3:

Пример 11. Рассмотрим множества A и B из примера 10. Тогда

$$A \setminus B = \{\text{Б, Г, Д, Ё, Ж, З, И, Й, Л, П, У, Ф, Ц, Ч, Ш, Щ, Ъ, Ы, Ь, Э, Ю, Я}\}$$
$$B \setminus A = \{\text{D, F, G, I, J, L, N, Q, R, S, U, V, W, Y, Z}\}$$

Дополнение множества A (иногда говорят про *отрицание* множества A), обозначаемое[7] через $\overline{A}$, — это множество всех элементов, не принадлежащих множеству A. Операция дополнения подразумевает наличие некоего универсального множества U, такого что $A \subset U$. Иногда это универсальное множество указывается явно, но чаще всего оно легко определяется из контекста. Например, если нам говорят, что число не является четным, то мы делаем вывод, что это число нечетное, так как все мы считаем, что дополнением множества четных чисел является множество нечетных чисел.

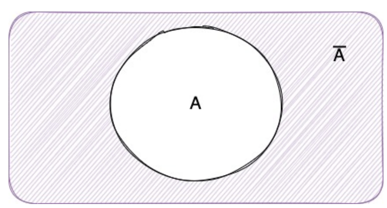


Рис. 4:

Если в задаче речь идёт о нескольких множествах, то универсальное множество должно содержать их все. Кроме того, универсальное множество не должно быть слишком большим: если мы говорим про множество целых чисел, то включать в универсальное множество геометрические фигуры, окна здания или преподавателей дискретной математики не имеет смысла. Во многих задачах в качестве универсальных удобно использовать следующие множества:
$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел,
$\mathbb{N} \cup \{0\}$ — множество целых неотрицательных чисел,
$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел,
$\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел,
$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел,
$\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел.

В зависимости от контекста задачи для множества натуральных чисел универсальным множеством могут быть множества $\mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

[7] Иногда для дополнения множества A используются и другие обозначения, например, CA.

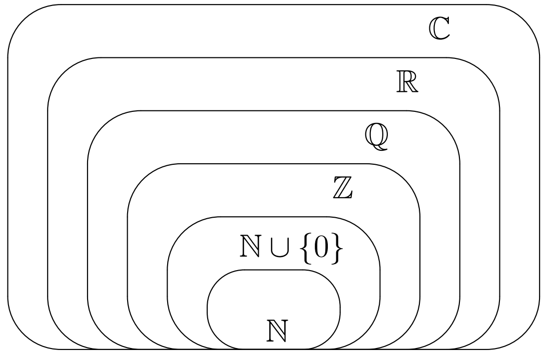


Рис. 5:

Отметим, что выполняются включения

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N} \cup \{0\} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C},$$

которые для наглядности схематично изображены на рисунке 5.

Симметрической разностью множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат ровно одному из множеств A и B. Симметрическая разность множеств A и B обозначается через $A \triangle B$. Симметрическую разность можно определить также следующим образом: $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Нетрудно видеть, что $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

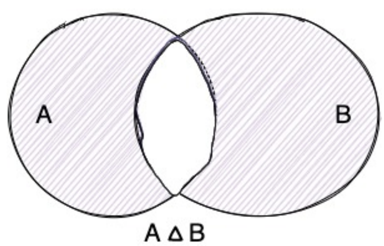


Рис. 6:

Пример 12. Рассмотрим множества A и B из примера 9. Тогда $A \triangle B = \{2, 4, 7, 9, 11\}$.

Пусть A, B, C — произвольные множества, U — (универсальное) множество, такое что $A \subset U$, $B \subset U$, $C \subset U$. Рассмотрим некоторые свойства операций над этими множествами.

1. Идемпотентность[8] объединения и пересечения: $A \cap A = A \cup A = A$ (объединение множество с самим собой, как и пересечение с самим собой, является исходным множеством)

2. Свойство подмножества: если $A \subset B$, то $A \cap B = A$, $A \cup B = B$ (если одно из множеств является подмножеством другого, то вложенное множество является их пересечением, а включающее — их объединением).

[8]Названия свойств запоминать необязательно, но бывает, что с называниями запоминать проще. *Например, кому-то может быть интересна этимология слов.*

3. Свойства пустого множества: $A \cap \varnothing = \varnothing$ (пересечение любого множества с пустым множеством снова даёт пустое множество), $A \cup \varnothing = A$ (объединение любого множества с пустым множеством не меняет исходное множество). Отметим, что эти равенства являются частным случаем свойства 2.

4. Свойства универсального множества: $A \cap U = A$ (пересечение любого множества с универсальным множеством даёт исходное множество), $A \cup U = U$ (объединение любого множества с универсальным множеством даёт универсальное множество). Отметим, что эти равенства также являются частным случаем свойства 2.

5. Коммутативность (переместительный закон) для пересечения, объединения и симметрической разности: $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$, $A \triangle B = B \triangle A$ (от перестановки компонент при объединении, пересечении и симметрической разности множеств результат не меняется).

6. Ассоциативность (сочетательный закон) для пересечения, объединения и симметрической разности: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, $A \cup (B \cup C) = = (A \cup B) \cup C$, $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$ (результат объединения нескольких множеств не зависит от порядка выполнения операций; аналогичные свойства справедливы для операций «пересечение» и («симметрическая разность»).

7. Дистрибутивность (распределительный закон) для объединения относительно пересечения и для пересечения относительно объединения: $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (объединение пересечения двух множеств с третьим совпадает с пересечением объединений третьего множества с каждым из первых двух), $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ (пересечение объединения двух множеств с третьим совпадает с объединением пересечений третьего множества с каждым из первых двух).

8. Законы де Моргана: $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (дополнение к объединению множеств совпадает с пересечением дополнений этих множеств), $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (дополнение к пересечению множеств совпадает с объединением дополнений множеств).

9. Закон снятия двойного дополнения (отрицания): $\overline{\overline{A}} = A$ (дополнение к дополнению множества A совпадает с самим множеством A).

На всякий случай напомним, что все равенства работают в обе стороны — и слева направо, и справа налево. Так, например, для некоторых преобразований бывает удобно вместо множества A записывать $\overline{\overline{A}}$, а, например, дистрибутивность — это не только «раскрытие скобок», но и «вынесение за скобки общего множителя».

Большинство из сформулированных свойств следует непосредственно из определения. Но для доказательства некоторых требуется несколько шагов. Проиллюстрируем это на одном из равенств из пункта 7.

Пример 13. Докажем равенство $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Сначала установим включение $(A \cap B) \cup C \subset (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Пусть $x \in (A \cap B) \cup C$. Тогда элемент x содержится хотя бы в одном из множеств $A \cap B$ или C. Если $x \in A \cap B$, то одновременно выполняются соотношения $x \in A$ и $x \in B$. Из включения $x \in A$ следует, что $x \in A \cup C$, а из включения $x \in B$ следует, что $x \in B \cup C$, а значит, $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Если $x \in C$, то выполняются соотношения $x \in A \cup C$ и $x \in B \cup C$, следовательно $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Теперь покажем истинность обратного включения $(A \cup C) \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup C$. Пусть $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Тогда одновременно выполняются соотношения $x \in A \cup C$ и $x \in B \cup C$. Если $x \in C$, то $x \in (A \cap B) \cup C)$. Если же $x \notin C$, то поскольку $x \in A \cup C$, то $x \in A$, а поскольку $x \in B \cup C$, то $x \in B$. Таким образом, одновременно выполняются соотношения $x \in A$ и $x \in B$. Следовательно, $x \in A \cap B$. Поэтому $x \in (A \cap B) \cup C$.

Окончательно из включений $(A \cap B) \cup C \subset (A \cup C) \cap (B \cup C)$ и $(A \cup C) \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup C$ следует равенство $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Упражнение. Доказать равенство $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$.

2 Отображения и мощности множеств

2.1 Отображения множеств

Пусть заданы множества X и Y. *Отображением* φ множества X в множество Y называется правило, по которому каждому элементу множества X ставится в соответствие единственный элемент множества Y. Для отображения φ множества X в множество Y используется обозначение $\varphi : X \to Y$.

Приведем несколько примеров отображений:

а) многие знакомые из школьного курса математики функции, заданные на множестве действительных чисел, в частности, $f(x) = x^2$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = |x|$;

б) отображение из множества натуральных чисел в множество чётных чисел по правилу: $1 \to 2$, $2 \to 4, \ldots$, $s \to 2s$, $\ldots$ (каждому числу ставится в соответствие в два раза большее число);

в) отображение множества студентов НИУ ВШЭ в множество номеров студенческих билетов.

Выделяют следующие типы отображений:

Сюръективное отображение (*сюръекция, отображение «на»*) — отображение вида $f : X \to Y$, при котором для любого элемента y из множества Y найдётся элемент x из множества X, такой что $f(x) = y$.

Рассмотрим следующий пример-иллюстрацию. Пусть у нас есть раздевалка для верхней одежды, в которой на крючках как-то висят куртки (будем считать, что там только куртки). Тогда мы имеем отображение множества курток на множество крючков. Отображение сюръективно, если все крючки заняты (при этом на некоторых может висеть больше одной куртки).

Инъективное отображение (*инъекция, отображение «в»*) — отображение вида $f : X \to Y$, при котором различным элементам множества X поставлены в соответствие различные элементы множества Y. Иными словами, в любой элемент y из множества Y отображается либо один элемент из множества X, либо таких элементов нет вообще.

В примере с куртками в раздевалке отображение сюръективно, если ни на каком крючке висит не больше одной куртки (но могут быть пустые крючки).

Биективное отображение (*биекция, взаимо однозначное отображение*) — отображение, которое является одновременно сюръективным и инъективным.

В примере с раздевалкой отображение биективно, если на каждом крючке висит ровно одна куртка.

Пример 14. Отображение $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ по правилу $n \to 2n$ является инъекцией.

Пример 15. Отображение $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ по правилу $n \to -n$ является биекцией.

Пример 16. Отображение $\mathbb{R} \to [-1, 1]$ по правилу $x \to \sin x$ является сюръекцией.

Отметим, что биективное отображение обладает свойством симметричности: если множество X взаимно однозначно отображается на множество Y, то тем самым и множество Y взаимно однозначно отображается на множество X. Поэтому биективное отображение часто называют взаимно однозначным соответствием.

Кроме того биекция обладает свойством транзитивности: биективные отображения множества X на множество Y и множества Y на множество Z естественным образом порождают биективное отображение множества X на множество Z.

2.2 Мощность множеств

Множества X и Y называют *равномощными*, если можно построить взаимно однозначное соответствие множества X иY. Отметим, что два конечных множества равномощны тогда и только тогда, когда они состоят из одного и того же количества элементов.

Для бесконечных множеств понятие «количество элементов» неприменимо, поэтому используется его обобщение. Мощность множества — характеристика как конечных, так и бесконечных множеств, обобщающая понятие «число элементов» в множестве.

Среди бесконечных множеств выделим два «эталонных» множества — множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел и множество $\mathbb{R}$ действительных чисел.

Множества, равномощные множеству $\mathbb{N}$ (множеству натуральных чисел), называются *счётными.*

Множества, равномощные множеству $\mathbb{R}$ (множеству действительных чисел), называются *континуальными.*

Пример 17. Множество целых чисел $\mathbb{Z}$ является счётным. Построим биекцию между множествами $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$. Отобразим чётные натуральные числа в положительные целые по правилу $y = x/2$, а нечётные натуральные — в отрицательные целые и ноль по правилу $y = (1 - x)/2$. Данное отображение является биекцией. Следовательно, множество $\mathbb{Z}$ — счётно.

В заключение покажем, что множества $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ не являются равномощными.

Предположим, что это не так и существует биекция между элементами множеств $\mathbb{R}$ и $\mathbb{N}$. Пусть натуральному числу i при этой биекции соответствует действительное число α_i, которое представим в виде бесконечной десятичной дроби со знаком «+» или «−» перед самой дробью: $\alpha_i =]sigma_i a_{i0}, a_{i1} a_{i2} \ldots a_{it} \ldots$, где σ_i — знак, a_{i0} — целое число, а $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{it}, \ldots$ — цифры после запятой. При этом для определённости предоставления запретим использование фрагмента (9) — «девять в периоде». Тогда биекция имеет следующий вид:

$$
\begin{array}{ccc}
1 & \leftrightarrow & \sigma_1 a_{10}, a_{11} a_{12} \ldots a_{1t} \ldots \\
2 & \leftrightarrow & \sigma_2 a_{20}, a_{21} a_{22} \ldots a_{2t} \ldots \\
3 & \leftrightarrow & \sigma_3 a_{30}, a_{31} a_{32} \ldots a_{3t} \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
s & \leftrightarrow & \sigma_s a_{s0}, a_{s1} a_{s2} \ldots a_{st} \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

Определим число $\widetilde{\alpha} = +0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_t \ldots$ следующим образом:

$$a_i = \begin{cases} 1, & \text{если } a_{ii} \neq 1; \\ 2, & \text{если } a_{ii} = 1. \end{cases}$$

Построенное число $\widetilde{\alpha}$ не совпадает ни с одним числом из перечисленных выше (поскольку отличается от i-го числа в i-м знаке после запятой). Следовательно, числу $\widetilde{\alpha}$ из множества $\mathbb{R}$ не соответствует никакое натуральное число. Противоречие с тем, что рассмотренное отображением между множествами $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ — биекция. Таким образом, эти множества не являются равномощными.