# 1 Метод математической индукции

Доказательство по индукции наглядно может быть представлено в виде так называемого принципа домино. Пусть какое угодно число косточек домино выставлено в ряд таким образом, что каждая косточка, падая, обязательно опрокидывает следующую за ней косточку (в этом заключается индукционный переход). Тогда, если мы толкнём первую косточку (это база индукции), то все косточки в ряду упадут.

Другое образное представление можно описать следующим образом. Пусть мы умеем подходить к основанию лестницы (база индукции), а также умеем подниматься на одну ступеньку (индуктивный переход). Тогда мы можем подняться на любую ступеньку лестницы.

Математическая индукция — метод математического доказательства, который используется, чтобы доказать истинность некоторого утверждения, зависящего от натурального параметра (номера). Для этого сначала проверяется истинность утверждения с каким-то начальным номером (чаще всего с номером 1) — *база* (*базис*) *индукции*, а затем доказывается, что если верны утверждения с номерами от начального номера до номера $n$, то верно и очередное утверждение с номером $n + 1$ — *шаг индукции*, или *переход индукци*.

Сформулируем принцип математической индукции более формально, точно и строго.

Предположим, что требуется установить справедливость конечной или бесконечной последовательности утверждений, занумерованных натуральными числами: $P_1, P_2, \ldots, P_n, P_{n+1}, \ldots$ (для определенности считаем, что база индукции соответствует случаю $n = 1$).

Для этого достаточно сначала установить истинность утверждения $P_1$ (проверить базу индукции), а затем доказать, что для любого номера $n$ если справедливы утверждения $P_1, P_2, \ldots, P_n$, то будет верным и утверждение $P_{n+1}$ (переход индукции). Тогда все утверждения нашей последовательности верны.

Описанный выше шаг индукции часто называют «переходом от $n$ к $n+1$». При этом стоит обратить внимание на то, что при «переходе от $n$ к $n + 1$» для доказательства очередного утверждения $P_{n+1}$ можно опираться не только на утверждение $P_n$, но и на все утверждения с меньшими номерами.

Заметим также, что переход индукции («очередной шаг»), можно с таким же успехом описать и «переходом от $m - 1$ к $m$».

## 1.1 Примеры решения задач методом математической индукции (по индукции).

Естественными примерами, когда формально работает метод математической индукции, являются простейшие рассуждения, которые мы завершаем фразой «ну, и так далее». Вспомним, например, как определялась в школе арифметическая прогрессия и как выводилась формула для $n$-го члена арифметической прогрессии.

*Арифметическая прогрессия* — это последовательность чисел (членов прогрессии)

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m,$$

в которой каждый член, начиная со второго, получается из предыдущего добавлением к нему постоянного числа $d$, называемого *шагом* или *разностью* арифметической прогрессии.

Чтобы найти формулу для $n$-го члена арифметической прогрессии, можно выписать последовательность равенств

$$\begin{gathered} a_2 = a_1 + d; \\ a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d; \\ a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d; \\ \ldots \\ a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d. \end{gathered}$$

Посмотрим, что же скрывается за многоточием. Сначала мы выписываем формулу для нескольких первых членов, их истинность проверяется непосредственно. А дальше мы считаем, что предполагаемая формула уже работает для всех предыдущих членов последовательности, то есть для всех тех, у которых номер меньше $n$, и опираясь на это, получаем формулу для $n$-го члена арифметической прогрессии. Мы как бы подразумеваем, что далее делаем необходимое количество однотипных шагов (то самое «ну, и так далее»), которые приводят нас к ответу для $n$.

Теперь докажем формулу $n$-го члена арифметической прогрессии, аккуратно применяя принцип математичесекой индукции. При этом обратим внимание на то, что сначала нужно четко сформулировать доказываемое утверждение.

**Задача 1.** Для любой конечной или бесконечной арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \ldots$ с разностью $d$ величина $n$-го члена прогрессии, $n = 2, 3, \ldots$, определяется формулой:

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

*База индукции* ($n = 2$). Истинность равенства $a_2 = a_1 + d$ следует непосредственно из определения арифметической прогрессии.

*Шаг индукции* ($n - 1 \mapsto n$). Пусть для любого значения $k$, удовлетворяющего условию $2 \leq k \leq n - 1$, доказываемая формула верна, т. е. $a_k = a_1 + (k-1)d$. Докажем эту формулу в случае, когда $k = n$.

Действительно, с одной стороны, в силу определения арифметической прогрессии справедливо равенство $a_n = a_{n-1} + d$. С другой стороны, по предположению индукции при $k = n - 1$ истинна формула $a_{n-1} = a_1 + (n-2)d$. Объединяя эти данные, получаем

$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-2)d + d = a_1 + (n-1)d.$$

Таким образом, устанавливаемая формула верна и для $k = n$.

Еще одну простую задачу о нахождении суммы арифметической прогрессии можно решить без привлечения метода математической индукции, однако мы установим справедливость соответствующей формулы по индукции.

**Задача 2.** Доказать, что при любом натуральном $n$ справедливо равенство

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

*База индукции* ($n = 1$). При $n = 1$ и левая и правая части доказываемого равенства обращаются в единицу.

*Шаг индукции* ($n \mapsto n+1$). Пусть для любого значения $k$, удовлетворяющего условию $1 \leq k \leq n$, справедливо равенство $1+2+3+\ldots+k = k(k+1)/2$. Докажем, что при $k = n+1$ утверждение также верно, т. е. $1+2+3+\ldots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. С учетом предположения индукции это устанавливается совсем просто:

$$1+2+3+\ldots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Для следующей задачи решение с помощью привлечения метода математической индукции является наиболее естественным.

**Задача 3.** Докажите, что число $5^n - 4n + 15$ делится на 16 при всех целых неотрицательных $n$.

*База индукции.* Проверим утверждение для $n = 0$:

$$5^0 - 4 \cdot 0 + 15 = 16.$$

*Шаг индукции* ($n-1 \mapsto n$). Предположим, что для всех целых неотрицательных $k$, не превосходящих $n-1$, число $5^k - 4k + 15$ делится на 16. Покажем, что тогда число $5^n - 4n + 15$ тоже делится на 16. Преобразуем исходное выражение:

$$\begin{aligned} 5^n - 4n + 15 = 5 \cdot 5^{n-1} - 20n + 20 + 75 + 20n - 20 - 75 - 4n + 15 = \\ = 5 \cdot (5^{n-1} - 4(n-1) + 15) + 16(n-5) \end{aligned}$$

Применяя предположение индукции при $k = n-1$, получаем, что первое слагаемое делится на 16. Поскольку второе слагаемое также делится на 16, то и сумма делится на 16. Следовательно, число $5^n - 4n + 15$ делится на 16.

Рассмотрим задачу потруднее.

**Задача 4.** Доказать, что для любого натурального $n$ число $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$ является полным квадратом.

Доказать требуемый факт «в лоб», в том числе и по индукции, — задача, к которой без соответствующей подготовки даже непонятно как подступиться. Для того, чтобы решить задачу, формально усложним себе жизнь, усилив[1] доказываемое утверждение до следующего: доказать для любого натурального $n$ равенство

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1+2+3+\ldots+n)^2.$$

В такой постановке утверждение уже несложно доказывается по индукции (здесь, правда, за кадром остается вопрос о том, как догадаться до доказываемого равенства).

Прежде чем непосредственно переходить к доказательству, перепишем с учетом задачи 2 доказываемое неравенство следующим образом:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

[1] В новой (второй) формулировке задача решается существенно проще, однако вторая версия формально является более трудной, так как решение задачи во второй формулировке автоматически является и решением задачи в первой формулировке, а вот обатную сторону твкой вывод, вообще говоря, сделать нельзя.

*База индукции.* При $n = 1$ получаем истинное равенство $1^3 = 1^2$.

*Шаг индукции* $(n \mapsto n+1)$. Пусть для любого значения $k$, удовлетворяющего условию $1 \leq k \leq n$, справедливо равенство

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2.$$

Проверим справедливость утверждения для $k = n+1$ :

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = \ & \text{(по предположению индукции)} \\ = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2 \left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right) = \\ = (n+1)^2 \left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Следовательно, утверждение выполняется для $k = n+1$. А значит, утверждение выполняется для всех натуральных $n$.

Задача 4 показывает, что иногда бывает так: важно суметь догадаться до ответа, а уж доказательство того, что это действительно правильный ответ, — чисто техническая и не очень трудная работа. В дальнейшем мы еще столкнемся с такими примерами, в частности, при изучении рекуррентных последовательностей.

Отметим также, что в задаче 4 вместо исходного утверждения мы доказывали формально более сильное. Еще более выпукло возможности доказательства по индукции более сильного утверждения иллюстрирует следующая задача.

**Задача 5.** Доказать, что для любого натурального $n$ выполняется неравенство

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2.$$

Попытка провести доказательство этого неравенства по индукции обречена на провал: при переходе индукции — скажем, от $n$ к $n+1$ — мы опираемся на предположение индукции, заключающееся только в том, что сумма $n$ соответствующих слагаемых меньше 2. Не имея дополнительной информации о том, на сколько эта сумма меньше 2, невозможно гарантировать, что при добавлении еще одного положитльного слагаемого сумма по-прежнему останется меньше 2. Вот если бы на предыдущем шаге мы имели бы информацию о велчине «зазора» между двойкой и суммой, то в этом случае у нас бы хотя бы появился бы шанс.

Попробуем воспользоваться этим шансом, т. е. попытаемся доказать по индукции неравенство

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + f(n) \leq 2$$

для некоторой функции $f(n)$, принимающей положительные значения для всех натуральных $n$ — условие положительности нужно для того, чтобы из последнего неравенства вытекало исходное.

Выполнение базы индукции определяется истинностью соотношения $f(1) \leq 1$.

Теперь посмотрим, какие нужно наложить условия на функцию $f(n)$, чтобы можно шаг индукции имел законную силу. Итак, предполагаем, что справедливо неравенство

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+f(n)\leq 2.$$

Оценим соответствующую сумму, переходя от $n$ к $n+1$ :

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+f(n+1)=\\ =\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+f(n)\right)+\frac{1}{(n+1)^2}+f(n+1)-f(n)\leq\\ \leq 2+\frac{1}{(n+1)^2}+f(n+1)-f(n).\end{aligned}$$

Эта цепочка соотношений при выполнении условия

$$\frac{1}{(n+1)^2}+f(n+1)-f(n)\leq 0$$

гарантирует законность шага индукции.

Таким образом, если функция $f(n)$ удовлетворяет условиям:

1) $f(n)>0$ для любого натурального $n$;

2) $f(1)\leq 1$;

3) $\frac{1}{(n+1)^2}+f(n+1)-f(n)\leq 0$ для любого натурального $n$,

то доказательство по индукции усиленного неравенства вполне легетимно. Осталось выяснить существует ли функция $f(n)$ с такими свойствами.

Оказывается, да, существует: например, $f(n)=1/n$. Действительно,

$$\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=\frac{n+n(n+1)-(n+1)^2}{n(n+1)^2}=\frac{1}{n(n+1)}<0.$$

Следовательно, мы доказали по индукции справедливость для всех натуральных $n$ неравенства

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}\leq 2,$$

а, значит, и истинность исходного неравенства

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2.$$

Задача 5 показывает, что доказательство по индукции более сильного утверждения имеет не только минусы, но и большой плюс — предположение индукции, являющееся основой для перехода индукции, тоже более сильное утверждение.

Отметим, что пока во всех рассмотренных примерах доказательства по индукции предположение индукции использовалось только для «предшествующего» значения параметра. В следующей задаче предположение индукции уже используется дважды для двух разных значениях параметра, по которому ведется индукция.

**Задача 6.** Доказать следующее утверждение: если число $x + \frac{1}{x}$ является целым, то для любого натурального $n$ число $x^n + \frac{1}{x^n}$ — тоже целое.

*База индукции* $(n = 1)$ следует непосредственно из условия.

*Шаг индукции* $(n - 1 \mapsto n)$. Пусть для любого значения $k$, удовлетворяющего условию $1 \leq k \leq n - 1$, число $x^k + \frac{1}{x^k}$ является целым. Покажем, что тогда целым будет и число $x^n + \frac{1}{x^n}$. В силу равенства

$$\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^n + x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}} + \frac{1}{x^n}.$$

получаем, что

$$x^n + \frac{1}{x^n} = \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right).$$

По условию задачи и предположению индукции, применяемому для $k = n-1$ и $k = n-2$, справа во всех трех скобках стоят целые числа, т. е. справа — разность произведения целых чисел и целого числа. А значит, слева также целое число. Следовательно, утверждение также справедливо для $k = n$.

Рассмотрим теперь серьезную задачу, решающуюся методом математической индукции и в которой предположение индукции используется во всей своей полноте.

**Задача 7.** Доказать, что в любой стране, в которой из каждого города выходит четное число дорог и из любого города можно добраться по этим дорогам в любой другой, можно выехать из некоторого города, проехать по каждой дороге ровно один раз и вернуться в исходный город.

Доказывать будем это утверждение по индукции. Но в этой задаче у нас формально нет величины, которая могла бы стать параметром, по которому будут вестись индуктивные рассуждения — ранее в каждом примере у нас такая величина была непосредственно в формулировке. Введем такой параметр самостоятельно — индукцию будем вести по количеству дорог в стране, обозначив эту величину через $n$. Заметим, что по условию задачи менее двух дорог в стране быть не может.

*База индукции* $(n = 2)$. Две дороги может быть только в случае, когда в стране только два города и эти города соединены двумя дорогами. Понятно, что в этом случае проехать по каждой дороге ровно один раз и вернуться в исходный город можно.

*Шаг индукции* $(n - 1 \mapsto n)$. Пусть для любой страны с числом дорог не более $n - 1$ утверждение верно. Докажем возможность пройти по одному разу по каждой дороге и вернуться в стартовый город для произвольной страны с $n$ дорогами.

Опишем способ, позволяющий обойти все дороги по одному разу.

Начнем с предварительной процедуры: стартуя из произвольного города страны, мы каждый раз выезжаем из очередного города по новой дороге. Это всегда можно сделать, так как по условию из каждого норода выходит четное число дорог — если по одной мы въехали, то найдется еще хотя бы одна дорога, по которой можно выехать. Таким образом, в силу того факта, что в любой стране конечное число дорог, рано или поздно мы впервые попадем в город, в котором уже были (пусть он называется городом $M$), тем самым «закольцевав» или «зациклив» часть пройденного пути. На этом предварительная процедура заканчивается.

Начиная все сначала, стартовать будем из города $M$. Как-нибудь пометим те дороги, которые входят в «цикл» (при изучении темы «Графы» будет дано строгое математическое определение цикла, сейчас нам вполне достаточно интуитвного понимания) дорог, который описан в предварительной процедуре. Ну, например, как это модно в городе $M$, выложим вдоль дороги бордюрный камень из самой новой коллекции.

Если нам повезло и получилось так, что все дороги оказались помечены, то переход индукции установлен — стартуя из города $M$ мы объехали все дороги ровно по одному разу и вернулись в город $M$.

Теперь рассмотрим основной случай — остались непомеченные дороги. Отметим, что по-прежнему из каждого города страны выходит четное число непомеченных дорог, так как для каждого города число непомеченных дорог либо совпадает с числом всех дорог, либо ровно на 2 меньше. А вот условие, что из каждого города страны можно доехать до любого другого по непомеченным дорогам, уже может и не выполняться.

Для произвольного города назовем содержащей этот город *губернией* множество всех городов страны, в которые можно добраться из этого города по непомеченным дорогам. Тогда из каждого города губернии можно доехать в любой другой город этой губернии, а ни в какой другой город страны по непомеченным дорогам добраться нельзя. Понятно, что множество всех городов страны разбивается на губернии. Губерния может состоять и из одного города.

Для каждой губернии выполнены все условия предположения индукции: 1) из каждого города выходит четное число непомеченных дорог; 2) из каждого города губернии можно доехать по непомеченным дорогвм в любой другой город этой губернии; 3) число непомеченных дорог в губернии точно не превосходит величины $n - 2$. Поэтому, применяя предположение индукции, получаем, что можно выехать из некоторого города губернии, проехать по каждой непомеченной дороге этой губернии ровно один раз и вернуться в исходный город. На самом деле понятно, что в качестве начального города можно выбрать произвольный город губернии.

Наконец, приступаем к описанию алгоритма проезда по всем дорогам страны ровно по одному разу и возвращения в исходный город.

Статуем из города $M$. Сначала по предположению индукции проезжаем по всем непомеченным дорогам губернии, содержащей этот город, и возвращаемся в город $M$. Далее по помеченной дороге перемещаемся в новый город. Если этот город не входит в губернию, содержащую город $M$, то по предположению индукции проезжаем по всем непомеченным дорогам этой губернии и возвращаемся в исходный город, а далее по единственной помеченной дороге, на которой мы еще не были, переезжаем в новый город. Если же этот входит в губернию, содержащую город $M$, то сразу по этой помеченной дороге переезжаем в новый город.

Таким же образом поступаем, попав по помеченной дороге в очередной город. Если этот город мы еще не посещали, то не были и в этой губернии, и тогда проезжаем по всем непомеченным дорогам этой губернии, если же в этом городе были, то по непомеченным дорогам не ездим, а сразу переезжаем по помеченной дороге в следующий город.

Рано или поздно мы вернемся в город $M$. В этот момент мы проедем по всем дорогам страны, помеченным и непомеченным, ровно по одному разу.

В рассмотренной задаче 7 предположение индукции используется, вообще говоря, много раз, причем про то, с каким параметром используются предположения индукции, мы ничего конкретного (кроме факта, что этот пареметр не превосходит $n-2$) сказать не можем.

В следующем примере индукция ведется «рывками», по лестнице индукции мы прыгаем сразу через три ступеньки. При этом и база индукции проверяется для трех идущих подряд ступенек, чтобы при прыжках через три ступеньки мы какую-нибудь ступеньку не пропустили.

**Задача 8.** Доказать, что, имея гирьки весом 3 г и 5 г (в неограниченном количестве), можно уравновесить весы, на одной чаше которых находится груз массой $n$ г, где $n$ — натуральное число, $n \geq 8$.

Разобьём веса на тройки вида $3m-1$, $3m$ и $3m+1$, где $m$ — натуральное число, $m \geq 3$. Нетрудно видеть, что любое натуральное число, начиная с 8, попадает в одну из этих троек. Индукцию будем вести по $m$

*База индукции* ($m = 3$). Значение параметра $m$, равное 3, соответствует грузам массой 8, 9 и 10 г. Если масса груза 8 г, то используется по одной гирьке 3 г и 5 г, если масса груза 9 г, то используются 3 гирьки по 3 г, если масса груза 10 г, то используется две гирьки по 5 г.

*Шаг индукции* ($m-1 \mapsto m$). Предоположим, что для $k = m-1$ утверждение доказано. Покажем тогда, что используя заданные гирьки, можно уравновесить весы, на одной чаше которых находится груз массой $3m-1$, $3m$, или $3m+1$ г. По предположению индукции, используя гирьки весом 3 г и 5 г, можно уравновесить весы, на одной чаше готорых находится груз массой $3(m-1)-1$, $3(m-1)$, или $3(m-1)+1$ г. Добавляя к гирькам ещё одну гирьку весом 3 г, мы можем уравновесить весы с грузом массой $3m-1$, $3m$, или $3m+1$ г соответственно.

Следовательно, можно уравновесить весы с грузом массы $n$ г, где $n$ — любое натуральное число, $n \geq 8$.

Отметим, что бывают еще более хитрые варианты применения метода математической индукции, например, количество параметров, по которым ведется индукция, может больше одного.

## 1.2 Примеры ошибок в доказательстве по индукции.

Доказательство по индукции — очень важный и достаточно часто встречающийся в математике способ доказательства различных утверждений. Но такое доказательство, как и любое другое в математике, должно быть аккуратным и точным. Иначе может получится ерунда. Разберем несколько примеров неаккуратных (по сути неверных) доказательств по индукции.

Начнем с того, что нередко после решения нескольких задач, в которых база индукции совершенно очевидна, возникает желание в последующих задачах сразу переходить к содержательной части — доказательству легетимности шага индукции. Чего, конечно, делать нельзя. Если проигнорировать базу индукции, то в этом случае можно по индукции «доказать» такое абсурдное утверждение: «Любое натуральное число $n$ больше тысячи.» Действительно, шаг индукции ($n-1 \mapsto n$) безупречен: по предположению индукции выполняется неравенство $n-1 > 1000$. Следовательно, $n > 1001$; поэтому тем более $n > 1000$.

Теперь приведем еще несколько псевдодоказательств «по индукции». Попробуйте самостоятельно разобраться в каком месте каждого из «доказательств» содержится ошибка.

**Пример 1.** Доказать, что для всех натуральных $n$ число $n^2+n+41$ является простым.

Доказательство. Начинаем проверять все числа подряд:

| $n$ | $n^2+n+41$ | $n$ | $n^2+n+41$ | $n$ | $n^2+n+41$ | $n$ | $n^2+n+41$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 43 | 7 | 97 | 13 | 223 | 19 | 421 |
| 2 | 47 | 8 | 113 | 14 | 251 | 20 | 461 |
| 3 | 53 | 9 | 131 | 15 | 281 | 21 | 503 |
| 4 | 61 | 10 | 151 | 16 | 313 | 22 | 547 |
| 5 | 71 | 11 | 173 | 17 | 347 | 23 | 593 |
| 6 | 83 | 12 | 197 | 18 | 383 | 24 | 641 |

Конечно, нам быстро надоедает, так как кажется, что проверять бессмысленно — мы полностью прониклись мыслью о том, что утверждение верно. Но, ожидая подвоха, проверяем еще несколько чисел:

| $n$ | $n^2+n+41$ | $n$ | $n^2+n+41$ | $n$ | $n^2+n+41$ | $n$ | $n^2+n+41$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 691 | 28 | 853 | 31 | 1033 | 34 | 1231 |
| 26 | 743 | 29 | 911 | 32 | 1097 | 35 | 1301 |
| 27 | 797 | 30 | 971 | 33 | 1163 | 36 | 1373 |

По-прежнему все полученные числа простые. Всё, считаем утверждение доказанным.

**Пример 2.** Индукцией по $n$ докажем, что у любых $n$ людей глаза одинакового цвета.

*База индукции* ($n = 1$) является, очевидно, верным (хотя и бессодержательным) утверждением.

*Шаг индукции* ($n \mapsto n+1$). Пусть установлено, что у любых $n$ людей глаза одинакового цвета. Покажем, что тогда у любых $n+1$ людей глаза одинакового цвета. Действительно, если рассмотреть всех людей, кроме последнего, то по предположению индукции у них у всех глаза одинакового цвета. Теперь рассмотрим всех людей, кроме первого. У них по предположению индукции все глаза одинакового цвета (естественно, того же самого цвета). Поэтому у всех $n+1$ людей глаза одинакового цвета. Утверждение доказано по индукции.

**Пример 3.** Докажем, что насыпать кучу из манки (манной крупы) невозможно.

Индукция по числу крупинок $n$. База индукции: одна крупинка, конечно, не является кучей. Пусть теперь насыпано $n$ крупинок, и насыпанное не является кучей. Тогда добавление одной маленькой крупинки манки, безусловно, не превратит высыпанное в кучу.

**Пример 4.** Докажем индукцией по числу городов, что если в стране из каждого города выходит хотя бы одна дорога в какой-либо другой город, то из всякого города можно попасть в любой другой город страны.

*База индукции* ($n = 2$) очевидна.

*Шаг индукции* ($n \mapsto n+1$). Возьмем произвольную страну с $n$ городами и добавим к ней новый город, из которого выходит хотя бы одна дорога. Эта дорога ведет в один из старых городов. По предположению индукции из любого старого города можно попасть в любой другой старый город. Следовательно, из нового города можно попасть в любой старый город (и наоборот). Значит, из любого города можно попасть в любой другой город. Утверждение доказано по индукции.

Все предложенные в последних примерах «доказательства по индукции» не являются вообще доказательствами уже хотя бы потому, что с их помощью «доказываются» заведомо неверные утверждения. Поэтому сомнений в нелегитимности этих «доказательств», конечно, нет. Однако в жизни (на семинаре, контрольной, экзамене) приходится, как правило, доказывать методом математической индукции истинные утверждения. И тогда ошибки в доказательствах не так бросаются в глаза. Обращаем внимание на то, что при этом ошибочные доказательства, безусловно, так и остаются ошибочными.