

**Вычислительные социальные науки, 2023-24 уч. год****Дискретная математика****Шестая неделя (13-20 октября 2023 года)**

В. В. Кочергин, А. В. Михайлович

**Задача 1.** Разделите с остатком

- (a) 135 на 15;
- (b) 1 000 000 на 11;
- (c) 10 000 000 на 11;
- (d)  $10^n$  на 11;
- (e) 10 000 на 9;
- (f)  $10^n$  на 9;
- (g)  $2^{10}$  на  $2^3 - 1$ ;
- (h)  $(-5)$  на 3;

**Задача 2.** Найдите остаток от деления

- (a) 123 456 788 765 на 10;
- (b) 7 426 945 542 на 9;
- (c) 741 238 455 на 11.
- (d)  $2^{1024}$  на 3.

**Задача 3.** Верно ли, что число с суммой цифр 27 обязательно делится на 27?**Задача 4.** Докажите что квадрат нечётного числа даёт остаток 1 при делении на (a) 2; (b) 4; (c) 8.

**Определение 1.** Целые числа  $a$  и  $b$  называются *сравнимыми по модулю  $n$* , если имеют одинаковый остаток от деления на  $n$ . Обозначения:  $a \equiv b \pmod{n}$ .

**Задача 5.** Пусть  $a \equiv b \pmod{n}$  и  $c \equiv d \pmod{n}$ . Доказать, что в этом случае

- (a)  $(a + c) \equiv (b + d) \pmod{n}$ .
- (b)  $ac \equiv bd \pmod{n}$ .
- (c)  $a^k \equiv b^k \pmod{n}$ .

Подсказка: числа  $a$  и  $b$  можно представить в виде  $a = b + nk$ ,  $c = d + nl$ .

**Задача 6.** Всегда ли верно, что если  $ak = bk \pmod{n}$ , то  $a = b \pmod{n}$  при  $k \neq 0$ ?**Задача 7.** Пусть  $p$  — простое число,  $p > 3$ . Доказать, что число  $p^2 - 1$  делится на 24.**Задача 8.** Пусть у многочлена  $P(x)$  все коэффициенты целочисленные. Известно, что  $P(2)$  делится на 5,  $P(5)$  делится на 2. Доказать, что  $P(7)$  делится на 10.**Системы счисления.****Задача 9.** Десятичное число, большее нуля, кратно 16. Какое минимальное количество нулей будет в конце этого числа после перевода его в двоичную систему счисления?**Задача 10.** Найти основание  $d$  системы счисления, если известно, что

$$264_d = 144_{10}.$$

**Задача 11.** Найти основание  $d$  системы счисления, если известно, что

$$30_d = 27_{10}.$$

**Задача 12.** Решить уравнение

$$224_x + 1_{17} = 101_8.$$

**Задача 13.** Указать десятичные записи чисел

$$20121_3, \quad 1011010, 101_2 \quad 4567, 24_8 \quad 2FE, C_{16}.$$

**Задача 14.** Перевести числа

$$69_{10}, \quad 111_{10}, \quad 537_{10}, \quad 1349_{10}, \quad 2470_{10}, \quad 5263_{10}$$

в системы счисления с основаниями 2, 3, 8, 12, 16, 20.

**Задача 15.** Перевести дробные числа

$$55, 75_{10} \quad 113, 625_{10}, \quad 1234, 5678_{10}, \quad \frac{11147_{10}}{27_{10}}$$

в системы счисления с основаниями 2, 3, 8, 12, 16, 20 (с точностью 5 знаков после запятой).

### Алгоритм Евклида

**Задача 16.** С помощью алгоритма Евклида найти НОД чисел

$$1234 \text{ и } 234; \quad 616 \text{ и } 364; \quad 697 \text{ и } 221; \quad 2835 \text{ и } 2431.$$

**Задача 17.** Решить в целых числах уравнение

- (a)  $1234x + 234y = 7$ ;
- (b)  $616x + 364y = 28$ ;
- (c)  $697x + 221y = 51$ ;
- (d)  $2431x + 2835y = 2$ .

**Задача 18.** Найти НОД многочленов

- (a)  $2x^4 + x^3 + 4x^2 - 4x - 3$  и  $4x^4 - 6x^3 - 4x^2 + 2x + 1$ ;
- (b)  $x^4 - 2x^3 - x^2 - 4x - 6$  и  $2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 10x + 8$ ;
- (c)  $x^6 - 4x^5 + 11x^4 - 27x^3 + 37x^2 - 35x + 35$  и  $x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 20x^2 + 10x - 25$ ;
- (d)  $x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1$  и  $x^2 - x - 1$ ;
- (e)  $3x^5 + 5x^4 - 16x^3 - 6x^2 - 5x - 6$  и  $3x^4 - 4x^3 - x^2 - x - 2$ ;
- (f)  $x^4 + 5x^3 + 16x^2 + 23x + 21$  и  $x^3 + x^2 + x - 3$ .

**Задача 19.** Запись десятичного числа в системах счисления с основаниями 3 и 5 в обоих случаях имеет последней цифрой 0. Какое минимальное натуральное десятичное число удовлетворяет этому требованию?

**Задача 20.** Запись числа  $N$  в системе счисления с основанием 6 содержит две цифры, запись этого числа в системе счисления с основанием 5 содержит три цифры, а запись в системе счисления с основанием 11 заканчивается на 1. Чему равно  $N$ ?

**Задача 21.** Какое наименьшее подряд идущих натуральных чисел, меньших 1000, надо взять, чтобы их произведение делилось на любое натуральное число, меньшее 1000?

**Задача 22.** Есть 100 коробок, пронумерованных числами от 1 до 100. В одной коробке лежит приз, и ведущий знает, где он находится. Зритель может послать ведущему пачку записок с вопросами, требующими ответа «да» или «нет». Ведущий перемешивает записки в пачке и, не оглашая вслух вопросов, честно отвечает на все. Какое наименьшее количество записок нужно послать, чтобы наверняка узнать, где находится приз.

**Задача 23.** Вы — правитель средневековой империи, и завтра у вас намечается торжество. Это будет самая чумовая вечеринка из всех, что вы когда-либо устраивали. По такому поводу не грех открыть 1000 бутылок вина. Но вот незадача: одна из них отравлена.

У яда нет никаких симптомов, кроме смерти, которая наступает в течение 10–20 часов после принятия даже малейшей дозы яда.

В вашем распоряжении меньше 24 часов на то, чтобы определить, какая из бутылок отравлена. А ещё у вас есть всего 10 лабораторных мышей, и других нам так срочно взять нигде. Всё веселье будет испорчено, если умрёт кто-то, кроме них.

Есть ли возможность узнать, какая из бутылок отравлена?