Вычислительные социальные науки, 2023-24 уч. год
Дискретная математика
Четвёртая и пятая недели (25 сентября – 6 октября 2023 года)
В. В. Кочергин, А. В. Михайлович

Задача 1. Вычислить суммы:
a) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$; b) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$; c) $\sum\limits_{k} \binom{n}{2k}$; d) $\sum\limits_{k} \binom{n}{2k+1}$;
e) $\sum\limits_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$; f) $\sum\limits_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{n}{k}$; j*) $4\sum\limits_{k} \binom{n}{4k}$.

Задача 2. (a) Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся ни на одно из чисел 3, 5 и 7.
(b) Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся ни на одно из чисел 6, 10, 15.
(c) Найти число простых чисел, не превосходящих 100.

Комбинаторика (числа Фибоначчи)

Последовательность $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n, \ldots$ чисел Фибоначчи определяется рекуррентным образом: $f_1 = f_2 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ при всех n, $n \geq 2$.

Задача 3. Пусть φ — «золотое сечение», т. е. $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$. Доказать, что тогда для n-го члена последовательности Фибоначчи справедливы формулы:
a) $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - (-\varphi)^{-n}\right)$ (формула Бине);
b) $f_n = \left[\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}\right]$ (скобки обозначают ближайшее целое число).

Доказать, что элементы последовательности Фибоначчи удовлетворяют следующим соотношениям:
c) $f_1 + f_2 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1$;
d) $f_1 + f_3 + \ldots + f_{2n-1} = f_{2n}$;
e) $f_2 + f_4 + \ldots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$;
f) $f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$;
g) $f_n^2 + f_{n+1}^2 = f_{2n+1}$;
h) $f_{n+m} = f_{n-1}f_m + f_n f_{m+1} = f_{n+1}f_{m+1} - f_{n-1}f_{m-1}$;
i) $f_{3n} = f_{n+1}^3 + f_n^3 - f_{n-1}^3$;

Задача 4. Доказать, что любое натуральное число n может быть представлено, причем единственным образом, в виде

$$n = \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k f_k,$$

где $\alpha_i \in \{0, 1\}$, $\alpha_i + \alpha_{i+1} \leq 1$, $i = 2, 3, \ldots$

Задача 5. Для всех $n \geq 0$ докажите равенство

$$C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \ldots = f_{n+1}.$$

Комбинаторика (разное)

Задача 6. Сколькими способами из множества первых n натуральных чисел можно выбрать подмножество мощности k так, чтобы в подмножество не входили соседние числа?

Задача 7. Сколькими способами из множества первых n натуральных чисел можно выбрать подмножество мощности k так, чтобы в подмножество не входили соседние числа, считая при этом, что числа 1 и n — тоже соседние?

Задача 8. Сколькими способами король Артур может рассадить 5 пар враждующих рыцарей за круглым столом так, чтобы ни одна пара враждующих рыцарей не сидела рядом?

Задача 9. Сколькими способами можно расположить за столом шесть супружеских пар так, чтобы мужчины и женщины чередовались и никакие двое супругов не сидели рядом?

Задача 10. Пусть $N(r)$ — количество предметов, обладающих ровно r свойствами, $N_{\geq r}$ — количество предметов, обладающих не менее чем r свойствами. Докажите равенства

$$N(r) = \sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} S_k,$$

$$N_{\geq r} = \sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} \binom{k-1}{r-1} S_k.$$

Задача 11. Какие строки в треугольнике Паскаля состоят только из нечетных чисел?

Задача 12. Доказать, что любые два соседних члена последовательности Фибоначчи не имеют общих натуральных делителей, отличных от 1. Более того,

$$(f_n, f_m) = f_{(n,m)},$$

где (a, b) — наибольший общий делитель чисел a и b.