

**Вычислительные социальные науки, 2023-24 уч. год****Дискретная математика****Вторая и третья недели (12 – 19 сентября 2023 года)***В. В. Кочергин, А. В. Михайлович***Элементы теории множеств.**

**Задача 1.** Про множества  $A$  и  $B$  известно, что  $|B| \leq |A|$ . Верно ли, что  $B \subseteq A$ ? (через  $|A|$  обозначается число элементов множества  $A$ .)

**Задача 2.** Известно, что  $|A| = 3$ ,  $|B| = 5$ . Верно ли, что  $|A \Delta B| \leq 5$ ? Какие значения может принимать число  $|A \Delta B|$ ?

**Задача 3.** На окружности отмечены 1000 белых точек и одна черная. Чего больше: треугольников с вершинами в белых точках или четырехугольников, у которых одна вершина черная, а остальные три — белые?

**Задача 4.** Из ста женщин африканского племени Мумбо-Юмбо 40 умеют делать ожерелья из кокосов, 70 умеют вязать набедренные повязки из банановой травы и 30 женщин умеют делать оба дела. Сколько женщин в племени не смогут сделать ни того, ни другого?

**Задача 5.** В том же самом племени Мумбо-Юмбо из предыдущей задачи существует особый класс женщин (всего 15), способных изловить и приготовить слона. Известно, что 7 женщин могут приготовить слона и сделать ожерелье, 5 женщин смогут приготовить слона и связать повязку и только три женщины умеют делать все три дела. Сколько дам в племени не могут сделать ничего (ни изловить и приготовить слона, ни сделать повязку, ни сделать ожерелье)?

**Задача 6.** В группе из 50 ребят некоторые знают все буквы, кроме «р», которую просто пропускают при письме, а остальные знают все буквы, кроме «к», которую тоже пропускают. Однажды учитель попросил 10 учеников написать слово «кот», 18 других учеников — слово «рот», а остальных — слово «крот». При этом слова «кот» и «рот» оказались написанными по 15 раз. Сколько ребят написали свое слово верно? Ответ обоснуйте.

**Задача 7.** (Льюис Кэрролл) В ожесточенном бою 70 из 100 пиратов потеряли один глаз, 75 — одно ухо, 80 — одну руку и 85 — одну ногу. Каково минимальное число потерявших одновременно глаз, ухо, руку и ногу?

**Задачи на темы «Отображения множеств. Мощность множеств»**

**Задача 8.** Нарисуйте все отображения

- (а) из множества  $\{1, 2, 3\}$  в множество  $\{1, 2\}$ ;
- (б) из множества  $\{1, 2\}$  в множество  $\{1, 2, 3\}$ .

Какие отображения из множества  $1, 2, 3$  в себя могут быть получены композицией отображений из пунктов а) и б)?

**Задача 9.** Среди следующих отображений укажите все инъекции, сюръекции и биекции<sup>1</sup>:

<sup>1</sup> $\mathbb{N}$  — множество натуральных чисел;  $\mathbb{Z}$  — множество целых чисел;  $\mathbb{Q}$  — множество рациональных чисел, то есть чисел вида  $\frac{p}{q}$ , где  $p \in \mathbb{Q}$ ,  $q \in \mathbb{N}$ ;  $\mathbb{R}$  — множество действительных чисел.

- (a)  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , где  $x \rightarrow nx$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;
- (b)  $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ , где  $x \rightarrow bx$ ,  $b \in \mathbb{Q}$ ;
- (c)  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , где  $x \rightarrow x^2$ ;
- (d)  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , где  $x \rightarrow x^2$ ;
- (e)  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $x \rightarrow x^3$ .

Какие из отображений обратимы?

**Задача 10.** Докажите, что

- (a) множество точек отрезка  $[5, 3]$  и отрезка  $[15, 33]$  равномощны;
- (b) интервал  $(0, 1)$  и луч  $(0, \infty)$  равномощны.

**Задача 11.** Счётно ли объединение

- (a) конечного множества со счётным множеством;
- (b) конечного числа счётных множеств;
- (c) счётного числа счётных множеств?

**Задача 12.** Счетно ли любое бесконечное множество непересекающихся

- (a) интервалов на прямой, имеющих длину больше 1;
- (b) любых интервалов на прямой;
- (c) кругов на плоскости;
- (d) «восьмёрок» на плоскости (восьмёрка — это любые две окружности, касающиеся внешним образом);
- (e) букв «Т» на плоскости?

**Задача 13.** Верно ли, что квадрат со стороной единица равномощен отрезку  $[0, 1]$ ?

**Задача 14.** Методом математической индукции доказать, что законы де Моргана выполняются для любого количества компонент.