

Вычислительные социальные науки, 2023-24 уч. год**Дискретная математика****Графы-1 (1 декабря 2023 года)***В. В. Кочергин, А. В. Михайлович*

Задача 1. Доказать, что следующие утверждения эквивалентны

1. Граф G является деревом.
2. В графе G любые две вершины соединены единственной цепью.
3. Граф G связан и число ребер на единицу меньше числа вершин.
4. Граф G связан, но при удалении любого ребра перестает быть связным.
5. Граф G не содержит циклов, но при добавлении любого ребра образуется цикл.
6. Граф G не содержит циклов и число ребер на единицу меньше числа вершин.

Задача 2. Существует ли простой граф (без петель и кратных рёбер) на 8 вершинах, в котором 23 ребра и есть вершина степени 1?

Задача 3. В некоторой стране есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр-названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9, используя эти авиалинии (возможно, с пересадками)?

Задача 4. В простом графе на 400 вершинах степень каждой вершины равна 201. Докажите, что в этом графе есть цикл длины 3.

Задача 5. Какое максимальное число рёбер может быть в простом несвязном графе с n вершинами?

Задача 6. В некоторой стране 15 городов, каждый из которых соединён дорогами не менее, чем с 7 другими. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через другие города).

Задача 7. Сформулируйте следующее утверждение на языке теории графов и докажите его. На каждой лекции по дискретной математике есть два студента, которые знакомы с одинаковым числом студентов (знакомство считается взаимным).

Задача 8. Пусть $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ — множество вершин некоторого графа G . Определим на множестве V двуместный предикат $P(x, y)$, который принимает значение «ИСТИНА» тогда и только тогда, когда вершины x и y соединены ребром. Определим на множестве V двуместный предикат $R(x, y)$, который принимает значение «ИСТИНА» тогда и только тогда, когда вершины x и y совпадают.

I. Используя предикаты $P(x, y)$, $R(x, y)$, функции алгебры логики, кванторы всеобщности и существования, запишите следующее (везде рассматривается неориентированный граф, в пунктах (a) – (c) допускаются петли и кратные рёбра, в пунктах (d) – (i) граф является простым).

- (a) x и y — смежные вершины.
- (b) Существует путь длины 2 между вершинами x и y .
- (c) Граф G не содержит изолированных вершин.
- (d) Степень вершины x равна 2.
- (e) Граф G содержит ровно одну вершину степени 1.

- (f) Расстояние между вершинами x и y равно 2 (расстояние — минимальное число ребер в пути, у которого x является началом, а y — концом)
- (g) Граф G является полным.
- (h) Вершины x и y соединены с одними и теми же вершинами.

II. Пусть E — множество неупорядоченных пар различных элементов из V . Сколько элементов содержит множество E ?

III. Определим предикат $Q(x, y)$, в котором первый аргумент принадлежит множеству V , а второй — множеству E и который принимает значение «ИСТИНА» тогда и только тогда, когда вершина x инцидентна ребру y . Используя предикат $Q(x, y)$, $R(x, y)$, функции алгебры логики, кванторы всеобщности и существования, выразите предикат $P(x, y)$.

IV. Используя предикаты $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $R(x, y)$, функции алгебры логики, кванторы всеобщности и существования, запишите следующее:

- (a) Последовательность $v_{i_0}, e_{i_1}, v_{i_1}, e_{i_2}, v_{i_2}, e_{i_3}, v_{i_3}$ является путём.
- (b) Последовательность $v_{i_0}, e_{i_1}, v_{i_1}, e_{i_2}, v_{i_2}, e_{i_3}, v_{i_3}$ является цепью.
- (c) Последовательность $v_{i_0}, e_{i_1}, v_{i_1}, e_{i_2}, v_{i_2}, e_{i_3}, v_{i_3}$ является простой цепью.
- (d) Последовательность $v_{i_0}, e_{i_1}, v_{i_1}, e_{i_2}, v_{i_2}, e_{i_3}, v_{i_3}$ является циклом.
- (e) Граф G не содержит циклов длины 3. Сделать так, чтобы в выражении отрицания применялись только к предикатам P и Q .
- (f) Граф G не содержит циклов.

Задача 9. Пусть $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ — множество вершин. Сколько существует различных графов на этих вершинах?