

Вычислительные социальные науки, 2023-24 уч. год

Дискретная математика

Предикаты (17-24 ноября 2023 года)

В. В. Кочергин, А. В. Михайлович

Задача 1. Предикат $M(x)$ на множестве мужчин и женщин проверяет, является ли x мужчиной. Предикат $P(x, y)$ (также определённый на множестве мужчин и женщин) проверяет, является ли x родителем y . Переведите следующие высказывания и предикаты с языка кванторов на русский.

- $(\exists z)(P(x, z) \wedge P(z, y))$;
- $(\forall x)(\exists y) P(x, y)$;
- $(\forall x)(\exists y) P(y, x)$;
- $(\forall y)(\exists x)(\exists z)(P(x, y) \wedge P(z, y) \wedge M(x) \wedge \overline{M(z)})$;
- $(\exists x)(\exists y)(P(x, z) \wedge M(x) \wedge P(y, z) \wedge \overline{M(y)} \wedge P(x, t) \wedge P(y, t) \wedge \overline{(z = t)})$;
- $(\exists x)(P(x, z) \wedge M(x) \wedge P(x, t) \wedge \overline{(z = t)})$;

Задача 2. Используя предикаты из задачи 1 и отношение равенства (предикат), запишите следующие предикаты и высказывания на языке кванторов.

- x и y — единоутробные братья;
- x — дед y по материнской линии;
- $У x$ есть единственный брат (оба родителя общие).

Задача 3. Рассмотрим двуместный предикат $F(x, y)$ на множестве людей, проверяющий, считает ли человек x человека y своим другом. Что означают следующие высказывания:

- $(\forall x)(\forall y) (F(x, y) \rightarrow F(y, x))$;
- $(\forall x)(\exists y) F(x, y)$;
- $(\exists y)(\forall x) F(x, y)$;
- $(\forall x)(\exists y) F(y, x)$;
- $(\exists y)(\forall x) F(y, x)$.
- $(\forall y)(\exists x) F(x, y)$;
- $(\exists x)(\forall y) F(y, x)$;

Задача 4. На множестве $M = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ заданы предикаты:

$$S(x, y, z) = 1 \Leftrightarrow x + y = z,$$

$$P(x, y, z) = 1 \Leftrightarrow xy = z.$$

I. Записать формулы, задающие предикаты:

- $x = 0$;
- $x = 1$;
- x — чётное число;
- x — простое число (*обратите внимание, новый пункт!*);
- $x = y$
- x делит y .

II. Являются ли следующие формулы истинными или ложными в данной модели?

- $(\exists x)(\exists y)(\exists z)P(x, y, z)$
- $(\forall x)(\forall y)(\exists z)P(x, y, z)$

- (c) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)P(x, y, z)$
- (d) $(\exists x)(\exists y)(\exists z)S(x, y, z)$
- (e) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)S(x, y, z)$
- (f) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)S(x, y, z)$
- (g) $(\exists x)(\exists y)(\exists z)(S(x, y, z) \& P(x, y, z))$

III. При каких значениях переменных предикат является истинным,?

- (a) $(\exists x)P(x, y, z)$
- (b) $(\forall x)P(x, y, z)$
- (c) $(\forall x)(\exists y)P(x, y, z)$
- (d) $(\exists x)(\exists y)S(x, y, z)$
- (e) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)S(x, y, z)$
- (f) $S(x, y, z) \& P(x, y, z)$

Задача 5. На множестве $M = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ заданы предикаты:

$$S(x, y, z) = 1 \Leftrightarrow x + y = z,$$

$$P(x, y, z) = 1 \Leftrightarrow xy = z.$$

I. Записать формулы, задающие предикаты:

- (a) x нечётно;
- (b) $x \leq y$;
- (c) x — наименьшее общее кратное y и z ;
- (d) x — наибольший общий делитель y и z .

II.* Записать высказывание, выражающее

- (a) коммутативность сложения;
- (b) ассоциативность умножения;
- (c) бесконечность множества простых чисел.

III. Пусть $Q(x)$ — некоторый предикат на множестве M . Записать формулу, утверждающую, что «для любого чётного x выполняется $Q(x)$.»

Задача 6. Являются ли следующие формулы тождественно истинными, тождественно ложными или истинными на некоторых множествах? Если формулы являются истинными на некоторых множествах, то привести примеры таких множеств (и соответствующих предикатов).

- (a) $(\exists x)A(x) \rightarrow (\forall x)A(x)$;
- (b) $(\forall x)(\exists y)P(x, y) \rightarrow (\exists y)(\forall x)P(x, y)$;
- (c) $(\exists y)(\forall x)P(x, y) \rightarrow (\forall x)(\exists y)P(x, y)$;
- (d) $((\forall x)A(x) \& (\forall x)B(x)) \sim (\forall x)(A(x) \& B(x))$;
- (e) $((\exists x)A(x) \vee (\exists x)B(x)) \sim ((\exists x)(A(x) \vee B(x)))$;
- (f) $((\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x)) \sim (\forall x)(A(x) \vee B(x))$;
- (g) $((\exists x)A(x) \& (\exists x)B(x)) \sim ((\exists x)(A(x) \& B(x)))$;
- (h) $((\forall x)(\exists y)A(x, y)) \sim ((\exists y)(\forall x)A(x, y))$.