1 Предикаты

1.1 Исчисление высказываний

Будем рассматривать высказывания — предложения которые могут быть либо истинными, либо ложными[1]. Например, высказывания «4 — чётное число», «4<7» являются истинными, а высказывания «6 — простое число», «2+3=4» — ложными. Таким образом, высказывания можно рассматривать как объекты, принимающие значение 1 (если высказывание истино) и значени 0 (если высказывание ложно). А значит, мы можем применять к высказываниям функции алгебры логики, получая при этом сложные высказывания.

Пусть A и B — произвольные высказывания. Тогда.

1. $A\&B$ — высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания («A и B»)

2. $A \vee B$ — высказывание, истинное тогда и только тогда, когда хотя бы одно из высказываний A, B истинно («A или B»)

3. $\overline{A}$ — высказывание, истинное тогда и только тогда, когда высказывание A ложно (не A)

4. $A \to B$ — высказывание, истинное тогда и только тогда, когда хотя бы одно из высказываний B, $\overline{A}$ истинно («если A, то B»)

5. $A \sim B$ — высказывание, истинное тогда и только тогда, когда высказывания A и B одновременно истинны или одновременно ложны («A эквивалентно B»).

Сложное высказывание называется *тождественно истинным*, если оно истинно при любых значениях выходящих в него элементарных высказываний. Например, $A \vee \overline{A}$ — тождественно истинное высказывание.

Сложное высказывание называется *тождественно ложным*, если оно ложно при любых значениях выходящих в него элементарных высказываний. Например, $A\&\overline{A}$ — тождественно ложное высказывание.

1.2 Исчисление предикатов

Будем рассматривать предложения, зависящие от параметров. Например, «x пришёл на лекцию», $x \leq y$, x посещает занятия $|y$ в день недели z. Каждое из этих предложений при конкретных значениях x, y, z становится высказыванием, принимающим значение «истина» или «ложь». Такого рода предложения называются предикатами.

Более точно, предикатами будем называть фукнции $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, аргументы которых принимают значения из некоторого множества M, а сами функции принимают значения 0 («ложь») или 1 («истина»). Предикат, зависящий от n переменных, называется n-местным предикатом. Предикат, переменные которого принимают значения из множества M, будем называть предикатом, определённым на множестве M (предикатом над M).

[1] Отметим, что понятие «высказывание» является неопределимым, и может быть только пояснено.

Пример 1. M — множество натуральных чисел. Примеры предикатов:

1. «x — простое число»;
2. «$x < y$» (отметим, что в этом случае предикат двуместный);
3. «$x + y = z$» (трёхместный предикат).

Пример 2. M — множество студентов 1 курса программы «Фундаментальная и компьютерная лингвистика». Примеры предикатов:

1. «x пришёл/пришла на занятия»;
2. «x и y вместе едут домой» (двуместный предикат);
3. «x объясняет дискретную математику y» (двуместный предикат).

Отметим, что если предикат зависит от нескольких переменных, то эти переменные могут быть определены на разных множествах[2].

Пример 3. M_1 — множество студентов 1 курса программы «Фундаментальная и компьютерная лингвистика», M_2 — множество дисциплин, из которых состоит учебная программа 1 курса «Фундаментальная и компьютерная лингвистика». Примеры предикатов:

1. «x освоил y». В данном случае переменная x определена на множестве M_1, а переменная y — на множестве M_2.
2. «Сегодня x посетил занятие y и пропустил занятие z.» Переменная x определена на множестве M_1, переменные y и z — на множестве M_2.

Поскольку предикаты принимают значения 0 и 1 («ложь» и «истина»), то мы можем применять к ним функции алгебры логики. При этом также получаются предикаты.

Кроме того, для предикатов вводятся две новые операции (навешивание кванторов)[3].

Квантор общности. Пусть $P(x, y_1, \ldots, y_n)$ — некоторый предикат, зависящий от переменных $x, y_1, \ldots, y_n$. Высказывание «$P(x, y_1, \ldots, y_n)$ истинно для всех x» будем обозначать $(\forall x)P(x, y_1, \ldots, y_n)$. Это высказывание зависит от переменных $y_1, \ldots, y_n$, причём на произвольном наборе $\beta_1, \ldots, \beta_n$ оно принимает значение 1 тогда и только тогда, когда для любого значения α переменной x выполняется равенство $P(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n) = 1$. Такой переход от предиката $P(x, y_1, \ldots, y_n)$ к предикату $(\forall x)P(x, y_1, \ldots, y_n)$ называется навешиванием квантора общности.

Квантор существования. Пусть $P(x, y_1, \ldots, y_n)$ — некоторый предикат, зависящий от переменных $x, y_1, \ldots, y_n$. Высказывание «$P(x, y_1, \ldots, y_n)$ истинно при некотором x» будем обозначать $(\exists x)P(x, y_1, \ldots, y_n)$. Это высказывание зависит от переменных $y_1, \ldots, y_n$, причём на произвольном наборе $\beta_1, \ldots, \beta_n$ оно принимает значение 1 тогда и только тогда, когда существует некоторое значение α переменной x, такое, что $P(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n) = 1$. Такой переход от предиката $P(x, y_1, \ldots, y_n)$ к предикату $(\exists x)P(x, y_1, \ldots, y_n)$ называется навешиванием квантора существования.

[2] Однако, можем считать, что все переменные определены на одних и тех же множествах, взяв в качестве этого множества объединение исходных множеств. Так, в примере 3, можно считать, что предикаты определены на множестве $M \times M$, где $M = M_1 \cup M_2$.

[3] На самом деле достаточно ввести только один из кванторов, другой же выражается через первый с использованием функции отрицания.