1 Функции алгебры логики

1.1 Базовые понятия (раздел не завершён!)

Функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, определённые на множестве наборов из нулей и единиц и принимающие на каждом из этих наборов значения 0 или 1, будем называть *функциями алгебры логики* или *булевыми функциями*. Поскольку число наборов длины n из нулей и единиц конечно, то любая функция может быть полностью задана перечислением значений на каждом наборе — *таблица истинности*.

x_1	x_2	$\ldots$	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$
0	0	$\ldots$	0	0	$f(0, 0, \ldots, 0, 0)$
0	0	$\ldots$	0	1	$f(0, 0, \ldots, 0, 1)$
		$\ldots$			$\ldots$
σ_1	σ_2	$\ldots$	σ_{n-1}	σ_n	$f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}, \sigma_n)$
		$\ldots$			$\ldots$
1	1	$\ldots$	1	1	$f(1, 1, \ldots, 1, 1)$

Можно также сказать, что функция алгебры логики — это совокупность отображения множества наборов из нулей и единиц длины n в множество $\{0, 1\}$ и упорядоченный набор переменных. Таким образом, одинаковые функции алгебры логики — это функции от одних и тех же переменных и принимающие на всех наборах одинаковые значения[1]. Множество всех функций алгебры логики будем обозначать P_2. Множество всех функций алгебры логики от переменных $x_1, \ldots, x_n$ будем обозначать $P_2(x_1, \ldots, x_n)$.

Теорема 1. *Число функций алгебры логики от n переменных $x_1, \ldots, x_n$ равно 2^{2^n}.*

Пример 1. $|P_2(x)| = 2^{2^1} = 4$, $|P_2(x_1, x_2)| = 2^{2^2} = 16$, $|P_2(x_1, x_2, x_3)| = 2^{2^3} = 256$, $|P_2(x_1, x_2, x_3, x_4)| = 2^{2^4} = 256^2 = 65536$, $|P_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)| = 2^{2^5} = 65536^2 > 4,2 \cdot 10^9$, $|P_2(x_1, x_2, \ldots, x_{10})| = 2^{2^{10}} = 2^{1024} > 2^{10 \cdot 102} = 1024^{102} > 10^{3*102} = 10^{306}$

Рассмотрим отдельно функции от 1 и 2 переменных. Выпишем таблицы для них.

x	0	x	$\overline{x}$	1
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

В этой таблице перечислены все функции от одной переменной. Функция 0 — константа 0. Функция x — тождественная функция. Функция $\overline{x}$ —- отрицание x (не x). Функция 1 — константа 1.

x	y	0	$x\&y$		x		y	$x \oplus y$	$x \vee y$	$x \downarrow y$	$x \sim y$	$\overline{y}$		$\overline{x}$	$x \to y$	x/y	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

[1] Обратите внимание, что функция включает в себя ещё и переменные, в отличие от отображения

В этой таблице перечислены все функции от двух переменных. Выделим некоторые из них.

Функция $x\&y$ (также возможно обозначение $x \cdot y$, xy) называется конъюнкцией. По смыслу максимально приближена к союзу «и» (логическое И, логическое умножение).

Функция $x \oplus y$ называется суммой по модулю 2. По смыслу максимально приближена к исключающему ИЛИ, к конструкции «либо ..., либо ...».

Функция $x \vee y$ называется дизъюнкцией. По смыслу максимально приближена к союзу «или» (логическое ИЛИ, логическое сложение).

Функция $x \downarrow y$ — это стрелка Пирса.

Функция $x \sim y$ (также возможно обозначени $x \equiv y$) называется эквивалентностью. Принимает значение 1 тогда и только тогда, когда значения переменных совпадают.

Функция $x \to y$ называется импликацией. По смыслу максимально приближена к конструкции «если ..., то ...».

Функция x/y — это штрих Шеффера.

Можно заметить, что функции из первой таблицы также повторяются во второй таблице. При этом на значения функции x и $\overline{x}$ переменная y не влияет. Таким образом, переменные можно разделить на те, от которых зависит значение функции и те, от которых значение функции не зависит. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ зависит от переменной x_i существенно (x_i — существенная переменная функции f) тогда и только тогда, когда существует набор из $n-1$ нулей и единиц $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ из $\{0,1\}^{n-1}$ такой, что $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \neq f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$. В противном случае x_i — несущественная (фиктивная) переменная.

Пример 2. Рассмотрим функцию $f(x, y, z)$, заданную таблицей истинности:

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

У этой функции переменная y — несущественная (фиктивная).

Если x_i — фиктивная переменная, то для любого набора из $n-1$ нулей и единиц $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ выполняется равенство $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 0,\ \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$. Поскольку это равенство выполняется для любого набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$, то $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.[2] Функция $g(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ называется функцией, полученной из функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ путём удаления несущественной переменной x_i.

Пример 3. Рассмотрим функцию $f(x, y, z)$ из примера 2, у которой переменная y является несущественной. Тогда функция $g(x, z)$, заданная следующей таблицей, получена из функции $f(x, y, z)$ путём удаления несущественной переменной y.

[2] Вообще, $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ и $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ могут быть как одной и той же, так и различными функциями. Рассмотрим, например, следующую функцию:

x	z	$g(x,z)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Теперь рассмотрим в некотором смысле обратую операцию добавления фиктивной переменной. Пусть дана функция $f(x_1, \dots, x_n)$. Построим функцию $h(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$, значение которой определяется следующим образом: $h(\alpha_1, \dots, \alpha_n, 0) = h(\alpha_1, \dots, \alpha_n, 1) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Будем говорить, что фукция h получилась из функции f добавлением несущественной переменной. Отметим, что операция добавления несущественной переменной является неоднозначной, так как добавляться могут различные переменные.

Пример 4. Рассмотрим функцию $g(x, z)$ из примера 3. Добавлением несущественной переменной из неё можно получить функцию $f(x, y, z)$ из примера 3, а можно, например, функцию $f_1(u, x, z)$, заданную следующей таблицей.

u	x	z	$f(u,y,z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Две функции называются равными, если они получаются друг из друга в результате добавления и (или) удаления несущественных переменных. Так, например, функции из примеров 2, 3 и 4 являются равными (хотя таблицы истинности и даже число переменных у них различается).

---

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Тогда

y	z	$f(0,y,z)$	$f(1,y,z)$
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	0

При этом функции $g(y, z) = f(0, y, z)$ и $h(y, z) = f(1, y, z)$ являются функциями от двух переменных y и z.

1.2 Формулы.

Задавая функции алгебры логики при помощи таблицы, мы можем увидеть значения на каждом наборе. Однако зачастую этот способ громоздкий (для функции от 5 переменных потребуется 32 строки, а от 10 переменных — 1024 строки) и не позволяет увидеть свойства отдельной функции или какие-то общие свойства семейства функций, а также то, как функции соотносятся между собой.

Введём понятие *формулы* над множеством функций.

Пусть дано некоторое (конечное или счётное) множество функций

$$F = \{f_1(x_1, \ldots, x_{n_1}), f_2(x_1, \ldots, x_{n_2}), \ldots, f_s(x_1, \ldots, x_{n_s}), \ldots\}$$

Введём понятие формулы над множеством F. Это понятие определяется индуктивно[3].

1. Выражения $f_i(x_1, \ldots, x_{n_i})$ являются формулами над F.
2. Если $A_1, \ldots, A_{n_i}$ — либо переменные, либо формулы над F, то $f_i(A_1, \ldots, A_{n_i})$ — формула над F; выражения $A_1, \ldots, A_{n_i}$ (отличные от символов переменных) называются подформулами формулы $f_i(A_1, \ldots, A_{n_i})$.

Заметим, что при образовании новых формул вместо переменных исходных функций можно подставлять как формулы, так и переменные. Переменная, вообще говоря, не являются формулой. Переменная является формулой, если она входит в систему F (и обозначается тем же символом).

Пример 5. Пусть $F = \{\varphi(x_1, x_2)\}$. Тогда выражения $\varphi(x_1, x_2)$, $\varphi(x_1, x_1)$, $\varphi(x_2, \varphi(x_1, x_3))$ являются формулами над F, а $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ не является.

Упражнение. Пусть $F = \{\varphi(x_1, x_2), \psi(x_1, x_2, x_3), \zeta(x_1)\}$. Что из перечисленного ниже является формулой над F, а что не является?

$$\varphi(x, x); \quad \zeta(\psi(x_1, x_5, x_1)); \quad \psi(x_3, x_{1253}, \zeta(x_3)); \quad \zeta(\zeta(\zeta(x))); \quad \zeta(\zeta(x), \zeta(x));$$
$$\psi(\varphi(x_1, x_2), \varphi(x_2, x_3), \varphi(x_3, x_1)); \quad \psi(x_2, x_2); \quad \varphi(\zeta(x_2), \psi(x_2, x_3, x_1)).$$

Каждой формуле сопоставим некоторую функцию алгебры логики следующим образом. Пусть дана формула Φ над множеством функций $F = \{f_1(x_1, \ldots, x_{n_1}), f_2(x_1, \ldots, x_{n_2}), \ldots, f_s(x_1, \ldots, x_{n_s}), \ldots\}$, содержащая переменные $x_1, \ldots, x_n$ и не содержащая никаких других переменных. Пусть $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — некоторый набор значений переменных. Определим значение формулы Φ на наборе $\widetilde{\alpha}$ индуктивно[4].

1. Значение переменной x_i на наборе $\widetilde{\alpha}$ равно α_i.
2. Определим значение формулы $\Phi'(x_1, \ldots, x_n) = f_i(A_1, \ldots, A_{n_i})$ на наборе $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Пусть значения подформул $A_1, \ldots, A_{n_i}$ определены и равны соответственно $\beta_1, \ldots, \beta_{n_i}$. Тогда $\Phi'(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = f_i(\beta_1, \ldots, \beta_{n_i})$.

[3] Можно заметить, что привычные со школьного курса формулы построены аналогичным образом над множествами $\{+, -\}$, $\{+, -, \times, /\}$, $\{+, -, \times, /,$ возведение в степень, $\sqrt{\ }\}$

[4] В некотором смысле это похоже на вычисление большого примера по действиям. Мы расставляем действия и вычисляем результат на каждом шаге, а потом подставляем его в соответствующее следующее действие.

Так как можно определить значение формулы Φ на любом наборе переменных, то тем самым мы сопоставим этой формуле некоторую функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$. Про функцию, сопоставленную указанным выше способом формуле, говорят, что она *реализуется* или *выражается*. Таким образом, каждая формула выражает какую-то функцию алгебры логики. этой формулой.

Пример 6. Найдём значение функции $f(x, y, z) = (x\&y) \to ((z \oplus y) \vee \overline{x})$

x	y	z	$x\&y$	$z \oplus y$	$\overline{x}$	$(z \oplus y) \vee \overline{x}$	$f(x, y, z)$
0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0	0	0

Пример 7. Найдём значение функции $g(x, y, z) = \overline{((x\&y)\&z)}$

x	y	z	$x\&y$	$(x\&y)\&z$	$g(x, y, z)$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0

Формулы, реализующие равные функции, называются эквивалентными. Так, в примерах 6 и 7 формулы $f(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$ эквивалентны.

Рассмотрим множество $F = \{x\&y, x \vee y, x \oplus y, \overline{x}, x, 0, 1\}$. Отметим несколько важных примеров эквивалентных формул[5] над F.

1. Коммутативность операций &, $\vee$, $\oplus$:

$$x\&y = y\&x,$$
$$x \vee y = y \vee x,$$
$$x \oplus y = y \oplus x.$$

2. Ассоциативность операций &, $\vee$, $\oplus$:

$$x\&(y\&z) = (x\&y)\&z,$$
$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z,$$
$$x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z.$$

[5]В дальнейшем в формулах будем опускать внешние скобки и не будем заключать в скобки переменные и константы.

Ассоциативность операций позволяет в выражениях, состоящих из нескольких операций $\&$, $\vee$, $\oplus$ расставлять скобки произвольным образом. Поэтому естественно соглашение опускать скобки в таких выражениях. Совместно с коммутативностью это даёт возможность наиболее удобным образом группировать переменные и подформулы.

3. Дистрибутивность операций.

$$(x \vee y)\&z = (x\&z) \vee (y\&z),$$
$$(x \oplus y)\&z = (x\&z) \oplus (y\&z),$$
$$(x\&y) \vee z = (x \vee z)\&(y \vee z).$$

Первые два выражения похожи на то, что было в школе с операциями сложения и умножения. Третье выражение немного отличается, однако, построив таблицу значений функции, можно убедиться, что правая и левая часть эквивалентны.

4. Закон поглощения

$$x\&(x \vee y) = x,$$
$$x \vee (x\&y) = x.$$

5. Идемпотентность конъюнкции и дизъюнкции

$$x\&x = x,$$
$$x \vee x = x.$$

6. Перенос отрицания через конъюнкцию и дизъюнкцию.

$$\overline{(x\&y)} = \overline{x} \vee \overline{y},$$
$$\overline{(x \vee y)} = \overline{x}\&\overline{y}.$$

7. Снятие двойного отрицания

$$\overline{\overline{x}} = x.$$

8. Некоторые эквивалентности с использование отрицания и суммы по модулю 2:

$$x\&\overline{x} = 0, \qquad x \vee \overline{x} = 1,$$
$$x \oplus \overline{x} = 1, \qquad x \oplus x = 0.$$

9. Операции с константами

$$x\&1 = x, \qquad x\&0 = 0,$$
$$x \vee 1 = 1, \qquad x \vee 0 = x,$$
$$x \oplus 1 = \overline{x}, \qquad x \oplus 0 = x.$$

Эти равенства легко проверяются путём вычисления значений функций в левой и правой части равенств на каждом наборе значений переменных.

Введём дальнейшие соглашения, упрощающие вид формул.

1. В формулах, получающихся многократным применением операции $\vee$ к более простым формулам будем опускать скобки. Аналогично для операций конъюнкции и суммы по модулю 2.

   Пример 8.

$$A_1 \vee ((A_2 \vee A_3) \vee (A_4 \vee A_5)) = A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee A_4 \vee A_5;$$
$$(A_1 \& A_2) \& ((A_3 \& A_4) \& A_5) = A_1 \& A_2 \& A_3 \& A_4 \& A_5;$$
$$((A_1 \oplus A_2) \oplus A_3) \oplus (A_4 \oplus A_5) = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus A_4 \oplus A_5.$$

2. Будем использовать следующие обозначения.

$$\mathop{\&}_{i=1}^{n} A_i = A_1 \& A_2 \& A_3 \& \ldots \& A_n;$$
$$\bigvee_{i=1}^{n} A_i = A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee \ldots \vee A_n;$$
$$\bigoplus_{i=1}^{n} A_i = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus \ldots \oplus A_n.$$

   Пример 9.

$$\mathop{\&}_{i=1}^{7} x_i = x_1 \& x_2 \& x_3 \& x_4 \& x_5 \& x_6 \& x_7;$$
$$\bigvee_{i=1}^{5} (x_i \& y) = (x_1 \& y) \vee (x_2 \& y) \vee (x_3 \& y) \vee (x_4 \& y) \vee (x_5 \& y);$$
$$\bigoplus_{i=1}^{4} (z_i \vee y_i) = (z_1 \vee y_1) \oplus (z_2 \vee y_2) \oplus (z_3 \vee y_3) \oplus (z_4 \vee y_4).$$

3. Для нумерации формул будем использовать не только натуральные числа, но и наборы из нулей и единиц. Например, для формулы вида

$$A_{000} \vee A_{001} \vee A_{010} \vee A_{011} \vee A_{100} \vee A_{101} \vee A_{110} \vee A_{111}$$

   будем использовать запись

$$\bigvee_{\sigma_1=0}^{1} \bigvee_{\sigma_2=0}^{1} \bigvee_{\sigma_3=0}^{1} A_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}$$

   или запись

$$\bigvee_{(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)} A_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3},$$

   которая обозначает, что суммирование ведётся по всем наборам из нулей и единиц длины 3.

4. Также будем использовать в качестве индексов некоторое подмножество наборов из нулей и единиц. Так, например, запись

$$\bigvee_{(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4) | \sigma_1 \oplus \sigma_2 \oplus \sigma_3 \oplus \sigma_4 = 0} A_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4}$$

   обозначает, что суммирование ведётся по всем наборам из нулей и единиц длины 4, содержащее чётное число единиц.

2 СДНФ, СКНФ

(*универсальные типы формул, универстальные представления для ФАЛ...*)

Рассмотрим некоторые универсальные типы формул, которые существуют для почти всех (всех кроме некоторых констант) функций алгебры логики.

2.1 Функция, равная единице ровно на одном наборе

Заметим, что дизъюнкция двух функций равна единице на тех наборах, на которых хотя бы одна из этих функций равна единице. Поэтому если мы научимся строить функцию, которая принимает значение на произвольном наборе значений, мы сможем построить формулу для любой функции алгебры логики кроме тождественного нуля.

Рассмотрим конъюнкцию переменных $x_1, \ldots, x_n$: $x_1 x_2 \cdots x_n$. Эта функция равна единице на наборе, состоящем из одних единиц и равна нулю на всех остальных наборах. Построим теперь функцию, которая равна единице ровно на одном выбранном наборе.

Введём функцию

$$x^\sigma = \begin{cases} x, & \text{если } \sigma = 1; \\ \overline{x}, & \text{если } \sigma = 0. \end{cases}$$

Эта функция обладает следующим свойством: x^σ принимает значение 1 тогда и только тогда, когда x принимает значение σ (проверяется по определению фукнции x^σ.). Следовательно, конъюнкция

$$x_1^{\sigma_1} \& x_2^{\sigma_2} \& \ldots \& x_n^{\sigma_n}$$

принимает значение 1 на наборе $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, а на всех останльных наборах равна нулю[6].

Пример 10. Запишем формулу указанного вида для функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_{10})$, приниающей значение 1 на наборе (0111001011) и равной нулю на остальных наборах.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{10}) = x_1^0 x_2^1 x_3^1 x_4^1 x_5^0 x_6^0 x_7^1 x_8^0 x_9^1 x_{10}^1 = \overline{x}_1 x_2 x_3 x_4 \overline{x}_5 \overline{x}_6 x_7 \overline{x}_8 x_9 x_{10}.$$

2.2 Пример построения СДНФ

СДНФ — дизъюнкция элементарных конъюнкций, то есть таких конъюнций, в которые входит каждая переменная или её отрицание.

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) | f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 1} x_1^{\sigma_1} \cdots x_n^{\sigma_n}.$$

Поясним эту запись. Дизъюнкция берётся по всем наборам $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, на которых функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ равна 1. В каждую конъюнкцию входит либо переменная (если соответствующая $\sigma_k = 1$), либо отрицание переменной (если соответствующая $\sigma_k = 0$.)

Пример 11. Построим СДНФ для функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, заданной таблицей истинности.

[6]Можно также считать, что x^σ — это обобщающее обозначение для переменной x или её отрицания, при этом мы в конъюнкцию подставляем x или $\overline{x}$ в зависимости от значения σ.

x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1,x_2,x_3,x_4)$
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

СДНФ включает в себя конъюнкции по тем наборам, на которых функция равна 1. В данном случае это наборы (0,0,0,0), (0,0,1,1), (0,1,1,1), (1,0,1,1) и (1,1,0,1). Каждому набору соответствует конъюнкция, которая равна единице на этом наборе и нулю на всех остальных. В данном случае это следующие конъюнкции: $\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4$, $\overline{x}_1\overline{x}_2x_3x_4$, $\overline{x}_1x_2x_3x_4$, $x_1\overline{x}_2x_3x_4$ и $x_1x_2\overline{x}_3x_4$. Таким образом, СДНФ для функции $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ имеет вид $\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3x_4 \vee \overline{x}_1x_2x_3x_4 \vee x_1\overline{x}_2x_3x_4 \vee x_1x_2\overline{x}_3x_4$.

2.3 Пример построения СКНФ

. Выше была построена функция, которая равна единице на одном заданном наборе. Аналогичным образом построим функцию, равную нулю ровно на одном наборе.

Функция $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n$ равна нулю только на наборе, состоящем из всех нулевых компонент. Используя функцию (обзначение) x^σ, введённое выше, можем построить функцию, принимающую значение 0 на наборе произвольном наборе $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$. Это дизъюнкция переменных или их отрицаний, где нулю в наборе $\widetilde{\sigma}$ соответствует переменная, а единице отрицание соответствующей переменной: $x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee \cdots \vee x_n^{\overline{\sigma_n}}$.

Пример 12. Запишем формулу указанного вида для функции $f(x_1,x_2,\ldots,x_{10})$, приниающей значение 0 на наборе (1010100010) и равной единице на остальных наборах.

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_{10}) = \overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3 \vee x_4 \vee \overline{x}_5 \vee x_6 \vee x_7 \vee x_8 \vee \overline{x}_9 \vee x_{10}.$$

Далее, соединяя конъюнкцией функции, принимающие значение 0 ровно на одном наборе, можем получить любую функцию, принимающую значение 0 на соответствующих наборах и равную единице на остальных наборах. А значит, получить любую функцию (функцию, заданную любой таблицей истинности).

СКНФ — конъюнкция элементарных дизъюнкций, то есть таких дизъюнций, в которые входит каждая переменная или её отрицание.

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \mathop{\&}_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)|f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=0} (x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee \cdots \vee x_n^{\overline{\sigma_n}}).$$

Пример 13. Построим СКНФ для функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, заданной таблицей истинности.

x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

СКНФ включает в себя дизъюнкции по тем наборам, на которых функция равна 0. В данном случае это наборы (0,0,0,1), (0,0,1,0), (0,1,0,0), (1, 0, 0, 0) и (1,1,0,1). Каждому набору соответствует дизъюнкция, которая равна нулю на этом наборе и единице на всех остальных. В данном случае это следующие дизъюнкции: $x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x}_4$, $x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3 \vee x_4$, $x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3 \vee x_4$, $\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4$ и $\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3 \vee \overline{x}_4$. Таким образом, СКНФ для функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ имеет вид

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x}_4)\&(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3 \vee x_4)\&(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3 \vee x_4)\&(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4)\&(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3 \vee \overline{x}_4).$$

3 Разложение булевой функции по переменным

Разложение функции от n переменных по переменной — это представление функции в виде дизъюнкции двух функций, каждая из которых представляет собой конъюнкцию выделенной переменной или её отрицания и функции от $n-1$ переменной.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 f(1, x_2, \ldots, x_n) \vee \overline{x}_1 f(0, x_2, \ldots, x_n).$$

Покажем, что на всех наборах $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ из нулей и единиц значения правой и левой части равенства совпадают.

Рассмотрим произвольный набор, в котором первая компонента равна нулю: $\widetilde{\alpha} = (0, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. В левой части равенства находится $f(0, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. В правой части равенства первая компонента дизъюнкции равна 0, так как она сама является конъюнкцией нуля с другой функцией, а вторая компонента является конъюнкцией единицы с функцией $f(0, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, а значит, равна $f(0, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Аналогичным образом рассмотрим набор $\widetilde{\beta} = (1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$. В левой части равенства находится $f(1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$. В правой части равенства первая компонента дизъюнкции является конъюнкцией единицы с функцией $f(1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, а вторая равна нулю как конъюнкция нуля и другой функции. А значит, правая часть также равна $f(1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$.

Каждую из функций $f(0, x_2, \ldots, x_n)$ и $f(1, x_2, \ldots, x_n)$ также можем разложить по переменной x_2.

$$f(0, x_2, x_3 \ldots, x_n) = x_2 f(0, 1, x_3, \ldots, x_n) \vee \overline{x}_2 f(0, 0, x_3, \ldots, x_n),$$
$$f(1, x_2, x_3 \ldots, x_n) = x_2 f(1, 1, x_3, \ldots, x_n) \vee \overline{x}_2 f(1, 0, x_3, \ldots, x_n).$$

Подставляя это в предыдущее равенство, получаем

$$f(x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n) = x_1 x_2 f(1, 1, x_3, \ldots, x_n) \vee x_1 \overline{x}_2 f(1, 0, x_3, \ldots, x_n) \vee$$
$$\vee \overline{x}_1 x_2 f(0, 1, x_3, \ldots, x_n) \vee \overline{x}_1 \overline{x}_2 f(0, 0, x_3, \ldots, x_n).$$

В общем случае верна следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть даны функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ и число k, $1 \leq k \leq n$. Тогда функцию можно представить в следующей форме*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)} x_1^{\sigma_1} \ldots x_k^{\sigma_k} f(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Доказывать эту теорему можно либо по индукции, либо подставляя соответствующие значения на места переменных, по которым идёт разложение.

Утверждение 3. Пусть $k = 1$. Тогда

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_n f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1) \vee \overline{x}_n f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0).$$

Утверждение 4. Пусть $k = n$. Тогда

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) | f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 1} x_1^{\sigma_1} \cdots x_n^{\sigma_n}.$$

4 Полные системы

Система F функций алгебры логики является полной, если любая фукнция алгебры логики выражается формулой над F.

Пример 14. Выше показано, что любую фнукцию можно выразить формулой в виде СДНФ или СКНФ, а значит, система $\{\&, \vee, ^-\}$ является полной.

Для проверки полноты системы удобно использовать следующую теорему.

Теорема 5. *Пусть F — полная система булевых функций и любая фукнкция из множества F выражается формулой над системой G. Тогда G — полная система.*

Пример 15. Покажем, что система $\{\&, \oplus, 1\}$ является полной. Для этого нужно показать, что каждая функция из полной системы $\{\&, \vee, ^-\}$ выражается формулой над $\{\&, \oplus, 1\}$. Конъюнкция имеется в явном виде. Формулы $x \vee y = x \& y \oplus x \oplus y$ и $\overline{x} = x \oplus 1$ можно проверить непосредственно подставляя значения на каждом наборе. А значит, система $\{\&, \oplus, 1\}$ является полной.

Пример 16. Примеры полных систем:

$$\{\vee, ^-\}, \{\&, ^-\}, \{|\}, \{\downarrow\}$$

Упражнение. Доказать полноту систем из примера 16.

4.1 Полином Жегалкина

Полином Жегалкина — сумма по модулю 2 произвольного подмножества введённого множества конъюнкций.

Пустому подмножеству соответствует пустой полином Жегалкина. По определению пустой полином Жегалкина выражает константу 0.

Полином Жегалкина в общем виде можно записать следующим образом:

$$\bigoplus_{i_1,\ldots,i_k} a_{i_1 i_2 \ldots i_k} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k},$$

где $a_{i_1 i_2 \ldots i_k} \in \{0, 1\}$ и суммирование ведётся по всем подмножествам множества $\{1, \ldots, n\}$.

Теорема 6 (И. И. Жегалкин)**.** *Любая булева функция представима в виде полинома Жегалкина, причём это представление единственно с точностью до перестановки слагаемых и перестановки переменных в элементарных конъюнкциях.*