

Социология, 2023-24 уч. год  
 Дискретная математика  
 Графы (22 февраля 2024 года)  
 В. В. Кочергин, А. В. Михайлович

**Задача 1.** Существует ли простой граф (без петель и кратных рёбер) на 8 вершинах, в котором 23 ребра и есть вершина степени 1?

**Задача 2.** В некоторой стране есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр-названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9, используя эти авиалинии (возможно, с пересадками)?

**Задача 3.** В простом графе на 400 вершинах степень каждой вершины равна 201. Докажите, что в этом графе есть цикл длины 3.

**Задача 4.** Какое максимальное число рёбер может быть в простом несвязном графе с  $n$  вершинами?

**Задача 5.** В некоторой стране 15 городов, каждый из которых соединён дорогами не менее, чем с 7 другими. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через другие города).

**Задача 6.** Сформулируйте следующее утверждение на языке теории графов и докажите его. На каждой лекции по дискретной математике есть два студента, которые знакомы с одинаковым числом студентов (знакомство считается взаимным).

**Задача 7.** Докажите, что граф или его дополнение связны (возможно оба связны).

**Задача 8.** Найдите все графы-пути (т. е. графы, множество рёбер которых образует простой путь) и графы-циклы (т. е. графы, множество рёбер которых образует простой цикл), дополнение которых граф-путь или граф-цикл.

**Задача 9.** Какие из следующих пар графов являются изоморфными и почему?

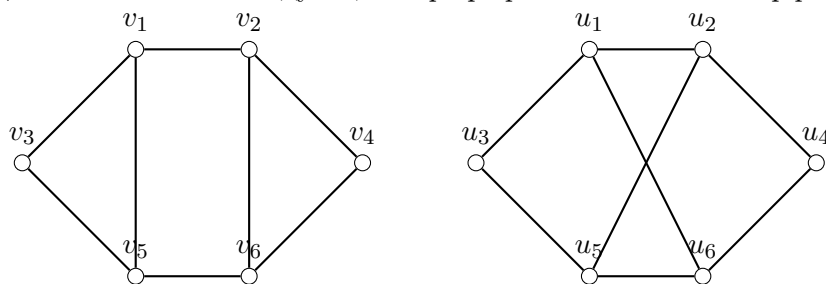


Рис 1.

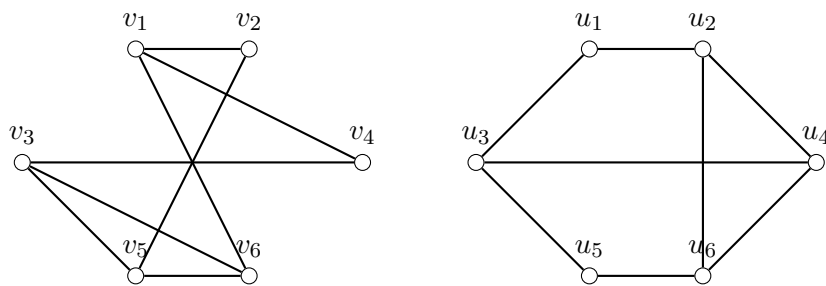


Рис 2.

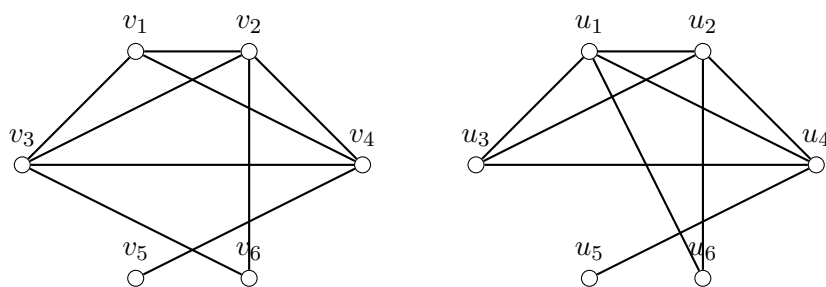


Рис 3.

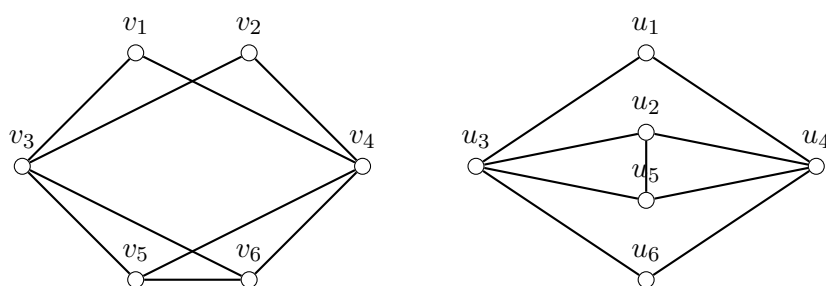


Рис 4.

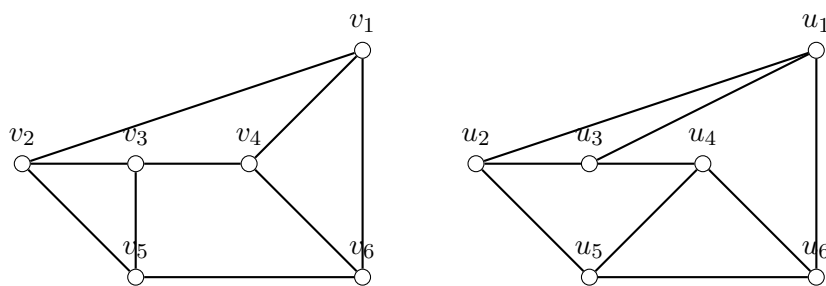


Рис 5.

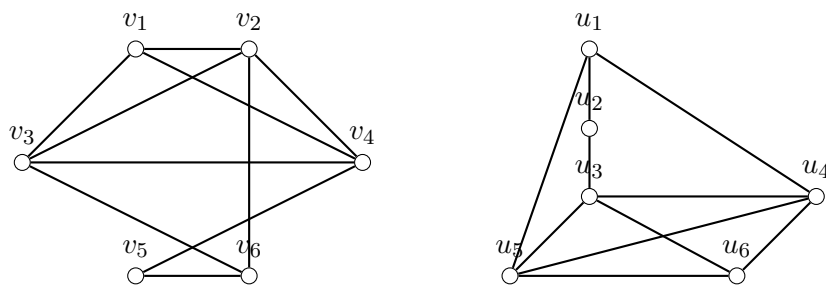


Рис 6.

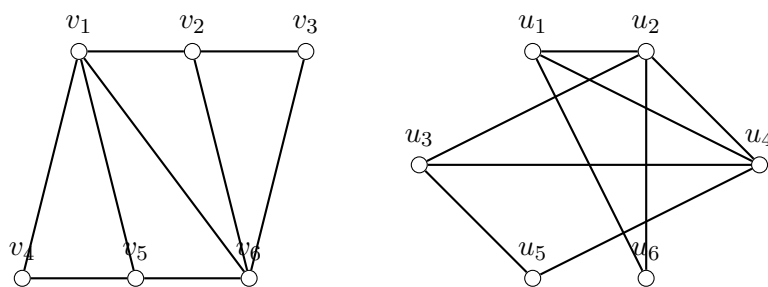


Рис 7.

**Задача 10.** Изобразить два неизоморфных графов с набором степеней вершин  $(1, 1, 2, 2, 3, 3, 4)$ .

**Задача 11.** Найти количество попарно неизоморфных графов с 12 вершинами, в которых степень каждой вершины равна 2.

**Задача 12.** Найти количество попарно неизоморфных графов с 6 вершинами и 13 рёбрами.

**Задача 13.** Найти количество попарно неизоморфных графов со следующим набором степеней вершин.

- (a)  $(6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7)$ ;
- (b)  $(4, 4, 4, 6, 6, 6, 6)$ ;
- (c)  $(13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 12, 12, 11, 11, 11, 11)$ .

**Задача 14.** Доказать, что следующие утверждения эквивалентны

1. Граф  $G$  является деревом.
2. В графе  $G$  любые две вершины соединены единственной цепью.
3. Граф  $G$  связен и число рёбер на единицу меньше числа вершин.
4. Граф  $G$  связен, но при удалении любого ребра перестаёт быть связным.
5. Граф  $G$  не содержит циклов, но при добавлении любого ребра образуется цикл.
6. Граф  $G$  не содержит циклов и число рёбер на единицу меньше числа вершин.

**Задача 15.** Доказать, что дерево — двудольный граф.

**Задача 16.** Доказать, что для любого плоского связного графа, содержащего больше одного ребра, выполняется неравенство  $2P \geq 3Г$ .

**Задача 17.** Доказать, что в любом плоском связном графе содержится вершина, степень которой не больше 5.