Социология, 2023-24 уч. год
Дискретная математика
Четвёртая и пятая недели (26 сентября –7 октября 2022 года)
В. В. Кочергин, А. В. Михайлович

Задача 1. Используя паблицы истинности и основные эквивалентности, выяснить, эквиваленты ли формулы

(a) $xy \vee z$ и $\overline{\overline{x}(\overline{y} \vee \overline{z})}$;
(b) $xy \oplus xz \oplus yz$ и $\overline{\overline{xy} \vee \overline{xz} \vee \overline{yz}}$;
(c) $(\overline{x} \to y) \to (\overline{x}y \sim (x \oplus y))$ и $(\overline{xy} \to x) \to y$;
(d) $\underline{(x \oplus yz) \to (\overline{x} \to (y \to z))}$ и $x \to ((y \to z) \to x)$;
(e) $\overline{((x \vee y) \to yz) \vee (y \to xz)} \vee (x \to (\overline{y} \to z))$ и $(x \to y) \vee z$.

Задача 2. На скольких наборах $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ функция алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ обращается в 1?

(a) $x_1x_2x_3x_4 \oplus x_1x_2x_3x_5 \oplus x_1x_2x_4x_5 \oplus x_1x_3x_4x_5 \oplus x_2x_3x_4x_5$, $(n = 5)$;
(b) $x_1x_2x_3 \oplus x_3x_4x_5 \oplus x_6$, $(n = 6)$;
(c) $f(x_1, \ldots, x_n) = (\ldots((x_1 \to x_2) \to x_3) \to \ldots) \to x_n$.

Задача 3. Представить в виде СДНФ

(a) $x \vee y$;
(b) $(x_1 \vee x_2) \to x_3$;
(c) (01010001);
(d) $(x_1 \oplus x_2)(x_3 \to \overline{x_2}x_4)$;

Задача 4. Представить в виде СКНФ

(a) $x_1 \oplus x_2$;
(b) $x_1\overline{x_2} \vee x_1x_3 \vee \overline{x_2}x_3$;
(c) (00101110).

Задача 5. Напишите отрицания к следующим утверждениям.

(a) Сегодня хорошая погода.
(b) $\sqrt{\pi^4 + 1} > 10$.
(c) Если завтра будет хорошая погода, то я пойду гулять в парк.

Задача 6. На аварийном пульте системы расположены 4 ламочки: L_1, L_2, L_3, L_4. Система выключается только в том случае, когда выполняется одно из следующих условий:

(a) загорелась L_1, но не загорелась L_2;
(b) загорелись L_2 и L_3, но не горит L_4;
(c) загорелась L_4 и не горит L_1.

(a) Построить таблицу функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, характеризующей условия выключения системы.
(b) Построить формулу этой функции.

Задача 7. Написать формулу, использующую только функции $x\&y$, $x \oplus y$ и 1, а затем упростить её, для функций

(a) $x \vee y \vee z$;
(b) $xy \vee xz \vee yz$.

Задача 8. Выразима ли функция $x \oplus y$ через функцию $x \to y$?

Задача 9. (a) Выразить функцию $x \downarrow y$ через функцию $x \mid y$.
(b) Выразить функцию $x \downarrow y$ через функцию $x \mid y$ с использованием минимально возможного числа операций (связок) $f \mid g$.

Задача 10. Написать формулу, использующую только функции $x \& y$, $x \vee y$ и $\overline{x}$ для функций от переменных x_1, x_2, x_3, x_4, принимающих значение 1 только на наборах
(a) (1001);
(b) $(0000), (1010), (1111)$.

Задача 11. Построить формулу над $P_2(2)$ (все функции алгебры логики, зависящие от двух переменных), реализующую функцию $f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$, которая принимает значение 1 тогда и только тогда, когда $|\tilde{x}| < |\tilde{y}|$ (где $|\tilde{x}|$ — число, двоичная запись которого задается набором $\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_n)$; старшие разряды расположены слева).

Задача 12. Используя язык функций алгебры логики, докажите равенства
(a) $A \backslash (A \backslash B) = A \cap B$;
(b) $B \cup (A \backslash B) = A \cup B$;
(c) $(A \backslash B) \cap ((A \cup B) \backslash (A \cap B)) = A \backslash B$;
(d) $(A \cap B) \backslash C = (A \backslash C) \cap (B \backslash C)$.

Задача 13. Пусть x, y, z — целые числа, для которых истинно высказывание

$$\overline{(x = y)} \& ((y < x) \to (2z > x)) \& ((x < y) \to (x > 2z)).$$

Чему равно x, если $z = 7$, $y = 16$?

Задача 14. Проследите за следующими рассуждениями. Сначала убеждаемся в истинности при произвольных A и B утверждения

$$(A \to B) \vee (B \to A).$$

Теперь возьмем произвольный угол. Пусть A — утверждение «косинус угла не превосходит 0», а B — «синус угла не превосходит 0». Утверждение «если косинус угла не превосходит 0, то синус угла не превосходит 0», очевидно, ложно; тогда истинным должно быть утверждение «если синус угла не превосходит 0, то косинус угла не превосходит 0», но оно также ложно. То есть оба утверждения в проверенной дизъюнкции ложны (при некотором выборе утверждений A и B), но сама дизъюнкция истинна! Найдите ошибку в рассуждениях.