Социология, 2023-24 уч. год
Дискретная математика
Вторая и третья недели (12 − 19 сентября 2023 года)
В. В. Кочергин, А. В. Михайлович

Элементы теории множеств.

Задача 1. Про множества A и B известно, что $|B| \leqslant |A|$. Верно ли, что $B \subseteq A$? (через $|A|$ обозначается число элементов множества A.)

Задача 2. Известно, что $|A| = 3$, $|B| = 5$. Верно ли, что $|A \triangle B| \leqslant 5$? Какие значения может принимать число $|A \triangle B|$?

Задача 3. На окружности отмечены 1000 белых точек и одна черная. Чего больше: треугольников с вершинами в белых точках или четырехугольников, у которых одна вершина черная, а остальные три —белые?

Задача 4. Из ста женщин африканского племени Мумбо-Юмбо 40 умеют делать ожерелья из кокосов, 70 умеют вязать набедренные повязки из банановой травы и 30 женщин умеют делать оба дела. Сколько женщин в племени не смогут сделать ни того, ни другого?

Задача 5. В том же самом племени Мумбо-Юмбо из предыдущей задачи существует особый класс женщин (всего 15), способных изловить и приготовить слона. Известно, что 7 женщин могут приготовить слона и сделать ожерелье, 5 женщин смогут приготовить слона и связать повязку и только три женщины умеют делать все три дела. Сколько дам в племени не могут сделать ничего (ни изловить и приготовить слона, ни сделать повязку, ни сделать ожерелье)?

Задача 6. В группе из 50 ребят некоторые знают все буквы, кроме «р», которую просто пропускают при письме, а остальные знают все буквы, кроме «к», которую тоже пропускают. Однажды учитель попросил 10 учеников написать слово «кот», 18 других учеников — слово «рот», а остальных — слово «крот». При этом слова «кот» и «рот» оказались написанными по 15 раз. Сколько ребят написали свое слово верно? Ответ обоснуйте.

Задача 7. (Льюис Кэрролл) В ожесточенном бою 70 из 100 пиратов потеряли один глаз, 75 — одно ухо, 80 — одну руку и 85 — одну ногу. Каково минимальное число потерявших одновременно глаз, ухо, руку и ногу?

Задачи на темы «Отображения множеств. Мощность множеств»

Задача 8. Нарисуйте все отображения
(a) из множества $\{1, 2, 3\}$ в множество $\{1, 2\}$;
(b) из множества $\{1, 2\}$ в множество $\{1, 2, 3\}$.
Какие отображения из множества 1, 2, 3 в себя могут быть получены композицией отображений из пунктов a) и b)?

Задача 9. Среди следующих отображений укажите все инъекции, сюръекции и биекции[1]
:

[1] $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел; $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел, то есть чисел вида $\frac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Q}$, $q \in \mathbb{N}$;; $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел.

(a) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, где $x \to nx$, $n \in \mathbb{Z}$;
(b) $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, где $x \to bx$, $b \in \mathbb{Q}$;
(c) $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, где $x \to x^2$;
(d) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, где $x \to x^2$;
(e) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, где $x \to x^3$.

Какие из отображений обратимы?

Задача 10. Докажите, что

(a) множество точек отрезка $[5, 3]$ и отрезка $[15, 33]$ равномощны;
(b) интервал $(0, 1)$ и луч $(0, \infty)$ равномощны.

Задача 11. Счётно ли объединение

(a) конечного множества со счётным множеством;
(b) конечного числа счётных множеств;
(c) счётного числа счетных множеств?

Задача 12. Счетно ли любое бесконечное множество непересекающихся

(a) интервалов на прямой, имеющих длину больше 1;
(b) любых интервалов на прямой;
(c) кругов на плоскости;
(d) «восьмёрок» на плоскости (восьмёрка — это любые две окружности, касающиеся внешним образом);
(e) букв «Т» на плоскости?

Задача 13. Верно ли, что квадрат со стороной единица равномощен отрезку $[0, 1]$?

Задача 14. Методом математической индукции доказать, что законы де Моргана выполняются для любого количества компонент.