1 Определения и простейшие свойства комбинаторных объектов

С чего начинается комбинаторика? В каком-то смысле она начинается с ответа на вопрос: сколькими способами можно среди n элементов выбрать k элементов? На самом деле это не один вопрос, а четыре — выборка может быть упорядоченной и неупорядоченной, повторный выбор одного и того же элемента может допускаться, а может не допускаться. Упорядоченные выборки называются *размещениями* или *наборами*, а неупорядоченные — *сочетаниями*. Как правило, по умолчанию под выборкой понимается выборка без повторений, а если речь идет о выборке с повторениями, то это оговаривается явным образом.

1.1 Общие соображения

Если множество A содержит n элементов (то есть выбрать один элемент из множества A можно n способами), а множество B — m элементов (то есть выбрать один элемент из множества B можно m способами), и нужно выбрать один элемент из множества A и один элемент из множества B, то такой выбор можно осуществить $n \cdot m$ способами.

Пример 1. В группе 6 юношей и 15 девушек, нужно выбрать пару «юноша и девушка» среди присутствующих. Это можно сделать $6 \cdot 15 = 90$ способами.

Пример 2. В столовой имеется чай, кофе, компот, вода и 7 видов выпечки. Студентка собирается перекусить каким-нибудь напитком с булочкой. Она может выбрать перекус $4 \cdot 7 = 28$ способами.

Замечание. *В советах «как все время одеваться по-разному при небольшом гардеробе» это правило используется постоянно (и каждый раз выдается за необыкновенное открытие). Например, если у девушки имеется 3 пары брюк, 2 юбки и 4 кофточки, то у неё имеется* $(3 + 2) \cdot 4 = 20$ *вариантов комплектов. А если к этому добавить пару жакетов, то число вариантов утраивается (можно пойти в одном из жакетов или без него).*

Факториалом натурального числа n называется произведение всех натуральных чисел от 1 до n. Обозначается $n!$. Для удобства считается, что $0! = 1$.

Можно определить факториал числа по индукции.

1. $0! = 1$.
2. $n! = n \cdot (n-1)!$.

Итак, пусть есть n-элементное множество, например, $M_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Дадим ответ на вопрос о числе выборок k элементов из этого множества.

1.2 Упорядоченные выборки с повторениями (размещения с повторениями).

Пример 3. Пусть у нас имеются 20 различных карандашей и 7 ящиков (различных). Сколькими способами можно разложить карандаши по ящикам? Первый карандаш можно положить в любой из семи ящиков, второй — тоже в любой из семи ящиков. И так каждый карандаш можно положить в любой из семи ящиков. Таким образом получаем, что всего имеется

$$\underbrace{7\cdot\ldots\cdot 7}_{20\text{ раз}} = 7^{20} = 79\,792\,266\,297\,612\,001 \approx 8\cdot 10^{16}$$

способов разместить 20 карандашей по 7 ящикам.

Обобщим этот пример. Пусть у нас имеется n различных предметов и k ящиков. Тогда каждый предмет можно положить в любой из k ящиков. Следовательно, получаем, что всего имеется

$$\underbrace{k\cdot\ldots\cdot k}_{n\text{ раз}} = k^n$$

способов разместить n предметов по k ящикам.

Пример 4. Аналогичным образом можно посчитать, сколько существует способов раскрасить 15 различных предметов в 10 цветов. Действительно, поскольку каждый предмет можно раскрасить в любой из k цветов, то всего существует

$$\underbrace{10\cdot\ldots\cdot 10}_{15\text{ раз}} = 10^{15}$$

способов раскрасить 15 различных предметов в 10 цветов.

Пример 5. Пусть у нас имеется 15 различных деревянных игрушек. Сколькими способами можем их раскрасить в 5 цветов (каждую игрушку красим ровно в один цвет)?

Первую игрушку можем покрасить в один из 5 цветов, вторую — тоже в один из пяти цветов, и так каждую из 15 игрушек можем покрасить в один из 5 цветов. Всего получаем

$$\underbrace{5\cdot 5\cdot\ldots\cdot 5}_{15} = 5^{15} = 30\,517\,578\,125 \approx 3\cdot 10^{10}.$$

Таким образом, число упорядоченных выборок с повторениями равно числу k-значных чисел в системе счисления по основанию n, т. е. равно

$$n^k.$$

1.3 Упорядоченные выборки без повторений (размещения).

Пример 6. Пусть у нас имеется 10 различных новогодних подарков и 15 различных подарочных пакетов. Любой подарок можно положить в любой пакет. Сколько существует способов упаковать подарки? Как и в предыдущих задачах, первый подарок можно положить в любой из 15 пакетов. Для второго подарка останется на выбор 14 пакетов. Для третьего — 13, для последнего — 6. Таким образом, существует $15\cdot 14\cdot 13\cdot\ldots\cdot 6 = 10\,897\,286\,400 \approx 10^{10}$ способов упаковать подарки. Используя обозначение факториала, это значение можно записать следующим образом.

$$15\cdot 14\cdot 13\cdot\ldots\cdot 6 = \frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot\ldots\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot\ldots\cdot 1}{5\cdot 4\cdot\ldots\cdot 1} = \frac{15!}{5!}.$$

Аналогичное соотношение получим для n подарков и k пакетиков. Первый подарок можно упаковать в любой из k пакетов, второй — в любой из оставшихся $k-1$ пакетов, третий — в один из оставшихся $k-2$ пакетов,…, последний — в любой из оставшихся $k-n+1$ пакетов. Поэтому всего будет

$$k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot (k-n+1) = \\ = \frac{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot (k-n+1) \cdot (k-n) \cdot (k-n-1) \cdot \ldots \cdot 1}{(k-n) \cdot (k-n-1) \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{k!}{(k-n)!}$$

способов упаковать подарки.

Пример 7. В гостинице 15 одноместных номеров. Сколько способов существует расселить 5 постояльцев по этим номерам (каждый постоялец собирается жить в отдельном одноместном номере). Первого постояльца можно поселить в одну из 15 комнат, второго — в одну из 14, третьего — в одну из 13, четвертого — в одну из 12, пятого — в одну из 11. Поэтому всего существует $15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 = 360\,360$ способов расселить 5 постояльцев в 15 одноместных номеров.

Пример 8. Сколько существует последовательностей из 0 и 1 длины n, содержащих k нулей и $n-k$ единиц?

Перестановки.

Пример 9. На карточках написаны числа от 1 до 7. Посмотрим, сколькими способами можно выложить эти карточки в ряд. На первое место можно поместить одну из семи карточек. На второе — одну из шести,…, на предпоследнее — одну из двух, на последнее — одну оставшуюся карточку. Таким образом, всего существует $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7! = 5040$ способов выложить 7 карточек в ряд.

Обобщим этот пример. Пусть у нас имеется n различных предметов. Сколькими способами можно их упорядочить (пронумеровать)? На первое место можно поместить любой из n предметов, на второе — любой из оставшихся $n-1$ предметов,…, на k-е место можно поместить любой из оставшихся $n-k+1$ предметов,…, на последнее — один оставшийся предмет. А значит, всего существует $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ способов упорядочить n различных предметов.

Пример 10. Занятие у вас закончилось чуть раньше и никого больше в столовой нет (8 юношей, 14 девушек). Сколькими способами вы можете выстроиться в очередь? В соответствии с рассуждениями, аналогичными предыдущим, получаем

$$22! = 1\,124\,000\,727\,777\,607\,680\,000 \approx 10^{21}$$

способов.

Пример 11. А если на первое место пропустим одну из девушек? Тогда первый человек может быть выбран 14 способами, второй — 21 способом, третий — 20 способами,…, предпоследним может быть один из двух, а в конец встает оставшийся. Получаем

$$14 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 14 \cdot 21! \approx 7 \cdot 10^{20}.$$

1.4 Неупорядоченные выборки без повторений (сочетания).

Пример 12. На полке стоит 15 различных книжек, а в сумку помещаются только 3. Сколькими способами можно взять 3 книжки с полки (в сумку)?

Предположим сначала, что расположение (порядок) книжек в сумке важен. Тогда первую книжку мы можем взять одну из 15, вторую — одну из 14, третью — одну из оставшихся 13. То есть всего $15 \cdot 14 \cdot 13$ способов. Пусть мы взяли книжки A, B, C. Если они у нас лежат в сумке «кучей», то упорядочить мы их можем $3! = 6$ способами. Значит, каждому беспорядочному набору из 3 книжек соответствует 6 упорядоченных наборов. Важно отметить, что разным неупорядоченным наборам соответствуют разные упорядоченные наборы. Число упорядоченных наборов мы знаем, поэтому получаем, что число «кучек» равно

$$\frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 455.$$

Обобщим эту задачу. Пусть у нас имеется n предметов, нам нужно выбрать k из них. Если бы был важен порядок предметов (например, книги на полке), то было бы $\frac{n!}{(n-k)!}$ способов сделать выбор. Поскольку k предметов можно упорядочить $k!$ способами, то каждой неупорядоченной выборке из k предметов соответствует $k!$ упорядоченных наборов. А значит, существует $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ способов выбрать k элементов из n.

Другими словами, одной неупорядоченной выборке k элементов без повторений соответствует $k!$ упорядоченных выборок без повторений, то число сочетаний из n элементов по k элементов, обозначаемое C_n^k, при $n \geq k \geq 0$ равно

$$\frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

1.5 Неупорядоченные выборки с повторениями (сочетания с повторениями).

Пример 13. Преподаватель берёт перед занятиями 10 маркеров. Они могут быть красными, синими, черными и зелеными. Сколько способов взять набор из 10 маркеров существует? Все маркеры одного цвета одинаковые.

Давайте возьмем 10 маркеров и разложим по 4 «ящикам с краской». У нас получится примерно следующее:

$$|\underbrace{\text{ооо}}_{\text{к}}|\underbrace{\text{оо}}_{\text{с}}|\underbrace{\text{оо}}_{\text{ч}}|\underbrace{\text{ооо}}_{\text{з}}|$$

или так:

$$|\underbrace{\text{ооооо}}_{\text{к}}|\underbrace{\quad}_{\text{с}}|\underbrace{\text{оооо}}_{\text{ч}}|\underbrace{\text{о}}_{\text{з}}|$$

или даже так (все-таки черный цвет маркера на лекции предпочтителен):

$$|\underbrace{\quad}_{\text{к}}|\underbrace{\quad}_{\text{с}}|\underbrace{\text{оооооооооо}}_{\text{ч}}|\underbrace{\quad}_{\text{з}}|.$$

В любом случае у нас имеется 10 маркеров и 3 «разделителя по цветам» (крайние вертикальные палочки положения не меняют), которые мы и располагаем на 13 последовательных местах. А значит, нам надо выбрать из 13 мест 3 для «разделителей», а остальные заполнить «маркерами-кружочками» единственным способом. Сделать это можно $C_{13}^3 = \frac{13\cdot 12\cdot 11}{3\cdot 2} = 286$ способами.

Обобщим этот пример. Пусть у нас имеется n предметов которые мы хотим разложить по k ящикам (или, что то же самое, раскрасить в k цветов). Тогда опять же, нам n предметов и $k-1$ разделитель надо упорядочить на $n+k-1$ месте. Выбрать места для «разделителей» можно C_{n+k-1}^{k-1} способами. На остальные n мест n одинаковых предметов размещаются единственным образом. Следовательно, существует C_{n+k-1}^{k-1} способов разложить n предметов по k ящикам.

Если говорить о выборке, то получается, что на каждом шаге мы выбираем «ящик» («цвет»), которые могут повторяться, и для которых не важен порядок выбора.

Между множеством всех сочетаний с повторениями из n элементов по k элементов и множеством всех двоичных наборов длины $n+k-1$ с k нулями следующим образом можно установить взаимно однозначное соответствие: выборке, в которой k_1 единиц, k_2 двоек, $\ldots$, k_n чисел n, $k_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, $k_1 + \ldots + k_n = k$, соответствует набор, в котором сначала расположены k_1 нулей, а затем последовательно для $i = 2, \ldots, n$ расположены наборы, состоящие из единицы и стоящих вслед за ней k_i нулей:

$$\underbrace{0\ldots0}_{k_1}1\underbrace{0\ldots0}_{k_2}1\ldots1\underbrace{0\ldots0}_{k_n}.$$

Таким образом, число искомых выборок равно числу C_{n+k-1}^k сочетаний из $n+k-1$ элементов по k элементов, т. е. числу

$$\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}.$$

Обобщим имеющиеся результаты. Пусть у нас есть выборка k предметов из n. Тогда число способов считается следующим образом, в зависимости от того, упорядоченная ли выборка и есть ли повторения.

	с повторениями	без повторений
упорядоченные	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$
неупорядоченные	$C_{n+k-1}^k = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}$	$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

1.6 Ещё примеры

Пример 14. Молодые люди решили пропустить всех девушек вперед (см. пример 10). Тогда очередь распадается на две части. Сначала упорядочиваем всех девушек 14! способами, а потом всех юношей 8! способами. Используя правило произведения получаем, что выстроить существует

$$14! \cdot 8! = 87\,178\,291\,200 \cdot 40\,320 = 3\,515\,028\,701\,000\,000 \approx 3.5 \cdot 10^{15}$$

способов выстроиться в очередь таким образом.

Пример 15. Посчитаем теперь способы поставить нашу группу из 22 человек другим спобом. Теперь будем выбирать не следующего человека, которого ставим в очередь, а место в очереди для следующего человека, а люди пусть у нас как-то уже занумерованы. Первого человека можем поставить к кассе и все. Второго — либо перед первым, либо после. Третьего — к кассе, между двумя предыдущими или в конец. При этом каждый следующий человек делит «свой кусочек очереди» на две части. Поэтому k-го человека можно поставить на k мест. Следовательно, и при таком способе подсчета вариантов имеем $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n!$.

Пример 16. Пусть в столовой открылась вторая и третья кассы. Теперь первого человека можем поставить в одну из 3 касс — три способа. Второго — либо в одну из двух пустых касс, либо в кассу, где стоит первый, причем двумя способами: до или после него. Также как и в предыдущем примере, каждый человек делит «свой кусочек очереди» на две части. А значит, для каждого следующего человека существует на один вариант постановки больше, чем для предыдущего. В результате получаем, что существует

$$3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24}{1 \cdot 2} = \\ = \frac{24!}{2!} = 620\,448\,401\,733\,239\,439\,360\,000 \approx 6 \cdot 10^{23}$$

способов поставить 22 человека в 3 кассы.

Обобщим этот пример. Теперь мы хотим поставить n человек в k касс. Первого человека можем поставить в любую из k касс. Также как и в предыдущих случаях, Также как и в предыдущем примере, каждый человек делит «свой кусочек очереди» на две части. А значит, для каждого следующего человека существует на один вариант постановки больше, чем для предыдущего. В результате получаем, что существует

$$k(k+1)(k+2) \cdot \ldots \cdot (n+k-1) = \\ = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (k-1)k(k+1)(k+2) \cdot \ldots \cdot (n+k-1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (k-1)} = \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!}$$

способов поставить n человек в k очередей.

Пример 17. Посчитаем, сколькими способами можно расставить 7 книг на 3 полках. В данном случае нам порядок важен, поэтому задача похожа на расстановку людей в очереди. В таком случае получаем

$$3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 8 \cdot 9 = \frac{9!}{2} = 181\,440$$

способов расставить 7 книг на 3 полках.

Обобщая, получим следующую формулу для упорядоченных выборок без повторений. Первый элемент можно выбрать n способами, второй элемент — $n-1$ способами, …, k-й элемент — $n-k+1$ способами. Таким образом общее число способов выбора равно

$$n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

1.7 Свойства биномиальных коэффициентов

1.7.1 Свойства сочетаний без повторений

.

1. Если $k > n$ или $k < 0$, то $C_n^k = 0$.

2. $C_n^0 = C_n^n = 1$.

3. Для любого целого k, $0 \le k \le n$, справедливо равенство $C_n^k = C_n^{n-k}$.

4. Функция $f(k) = C_n^k$ целочисленной переменной k возрастает на множестве $\{0, \dots, \lfloor n/2 \rfloor\}$ и убывает на множестве $\{\lceil n/2 \rceil, \dots, n\}$.

5. Выполняется равенство

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k.$$

6. Для любого ненулевого x и произвольного целого неотрицательного n справедливо равенство (бином Ньютона):

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k.$$

7. Верны равенства

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n,$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 0; \\ 0, & \text{если } n \ge 1, \end{cases},$$

$$\sum_{k=0}^{t} (-1)^k C_n^k = (-1)^t C_{n-1}^t \quad (n \ge 1,\ t \ge 0).$$

8. Треугольник Паскаля.

Запишем биномиальные коэффициенты по строкам, так, что в i-ой строке (нумерация идёт с нуля) будем записывать коэффициенты с нижним индексом i, а верхние будут идти в порядке возрастания от 0 до i.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
&&&&&&&&&C_0^0\\
&&&&&&&&C_1^0&&C_1^1\\
&&&&&&&C_2^0&&C_2^1&&C_2^2\\
&&&&&&C_3^0&&C_3^1&&C_3^2&&C_3^3\\
&&&&&C_4^0&&C_4^1&&C_4^2&&C_4^3&&C_4^4\\
&&&&C_5^0&&C_5^1&&C_5^2&&C_5^3&&C_5^4&&C_5^5\\
&&&C_6^0&&C_6^1&&C_6^2&&C_6^3&&C_6^4&&C_6^5&&C_6^6\\
&&C_7^0&&C_7^1&&C_7^2&&C_7^3&&C_7^4&&C_7^5&&C_7^6&&C_7^7\\
&C_8^0&&C_8^1&&C_8^2&&C_8^3&&C_8^4&&C_8^5&&C_8^6&&C_8^7&&C_8^8\\
C_9^0&&C_9^1&&C_9^2&&C_9^3&&C_9^4&&C_9^5&&C_9^6&&C_9^7&&C_9^8&&C_9^9\\
\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots
\end{array}$$

Если запишем численные значения, то получим

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
&&&&&&&&&&1&&&&&&&&&&\\
&&&&&&&&&1&&1&&&&&&&&&\\
&&&&&&&&1&&2&&1&&&&&&&&\\
&&&&&&&1&&3&&3&&1&&&&&&&\\
&&&&&&1&&4&&6&&4&&1&&&&&&\\
&&&&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&&&&\\
&&&&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&&&&\\
&&&1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1&&&\\
&&1&&8&&28&&56&&70&&56&&28&&8&&1&&\\
&1&&9&&36&&84&&126&&126&&84&&36&&9&&1&\\
1&&10&&45&&120&&210&&252&&210&&120&&45&&10&&1\\
\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots
\end{array}
$$

1.7.2 Свойства сочетаний с повторениям.

1. Число неотрицательных целочисленных решений уравнения

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n = k$$

равно числу сочетаний с повторениями из n элементов по k элементов, т. е. равно C^k_{n+k-1}.

2. Число монотонных отображений[1]) из множества $\{1, 2, \ldots, k\}$ в множество $\{1, 2, \ldots, n\}$ равно числу сочетаний с повторениями из n элементов по k элементов, т. е. равно C^k_{n+k-1}.

$\triangleright$ Между множеством из всех C^k_{n+k-1} двоичных наборов длины $n + k - 1$ с k единицами и множеством монотонных отображений из множества $\{1, 2, \ldots, k\}$ в множество $\{1, 2, \ldots, n\}$ следующим образом установим взаимно однозначное соответствие. Пусть в наборе длины $n + k - 1$ с k единицами число нулей до первой единицы равно r_1, число нулей, расположенных между единицами с номерами $i - 1$ и i, $i = 2, \ldots, k$, равно r_i:

$$\underbrace{0\ldots0}_{r_1}1\underbrace{0\ldots0}_{r_2}1\ldots1\underbrace{0\ldots0}_{r_k}10\ldots0.$$

Соответствующее этому набору монотонное отобажение f из множества $\{1, 2, \ldots, k\}$ в множество $\{1, 2, \ldots, n\}$ задается таким образом:

$$f(s) = 1 + \sum_{i=1}^{s} r_i, \quad s = 1, 2, \ldots, k.$$

Легко понять, что и по монотонному отображению исходный набор восстанавливается однозначно. $\square$

3. Для любого натурального n при $0 < |x| < 1$ справедливо равенство

$$(1 - x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} C^k_{n+k-1} x^k.$$

$\triangleright$ Установим коэффициент при слагаемом x^k после раскрывания скобок и приведения подобных слагаемых в выражении

$$\underbrace{(1 + x + x^2 + \ldots)\ldots(1 + x + x^2 + \ldots)}_{n \text{ раз}}.$$

[1]) Отображение f называется *монотонным*, если для любых a и b из области определения отображения f из неравенства $a \le b$ следует неравенство $f(a) \le f(b)$.

Если какое-либо выражение в скобках не дает «вклад» в конкретное слагаемое x^k, то считаем, что это выражение не входит в выборку, а если дает вклад x^s, $1 \leq s \leq k$, то — входит с кратностью s. Тогда коэффициент при x^k совпадает с числом сочетаний с повторениями из n элементов по k элементов. □

Теперь преобразуем выражение из свойства 3 сочетаний с повторениями следующим образом:

$$(1-x)^{-n} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+k-1)(n+k-2)\dots n}{k!} x^k =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-n)(-n-1)\dots(-n-k+1)}{k!} (-x)^k.$$

Таким образом, формулы из свойства 5 сочетаний и из свойства 3 сочетаний с повторениями являются частными случаями известного из курса математического анализа и справедливого для любого действительного α при $0 < |x| < 1$ разложения

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k,$$

где

$$\binom{\alpha}{0} = 1; \qquad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Очевидно, что для всех целых неотрицательных n и k верно равенство

$$C_n^k = \binom{n}{k}.$$

2 Формула включений-исключений

Для начала разберём задачу:

Пример 18. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся ни на одно из чисел 2, 3, 5 и 7.

Для решения этой задачи посчитаем все числа, которые делятся хотя бы на одно из чисел 2, 3, 5 и 7, а потом вычтем это количество из 1000. Для начала посчитаем, сколько положительных чисел, не превосходящих 1000, делится на 2, 3, 5 и 7 по-отдельности:

$$N_2 = \left[\frac{1000}{2}\right] = 500; \quad N_3 = \left[\frac{1000}{3}\right] = 333; \quad N_5 = \left[\frac{1000}{5}\right] = 200; \quad N_7 = \left[\frac{1000}{7}\right] = 142.$$

Если мы будем считать сумму этих чисел, то некоторые числа (например, 6, 10, 14, 30) будут посчитаны несколько раз. Чтобы учесть это, посчитаем количество чисел, которые делятся на 2 числа:

$$N_{23} = \left[\frac{1000}{6}\right] = 166; \quad N_{25} = \left[\frac{1000}{10}\right] = 100; \quad N_{27} = \left[\frac{1000}{14}\right] = 71;$$

$$N_{35} = \left[\frac{1000}{15}\right] = 66; \qquad N_{37} = \left[\frac{1000}{21}\right] = 47; \qquad N_{57} = \left[\frac{1000}{35}\right] = 28.$$

А также на 3 числа:

$$N_{235} = \left[\frac{1000}{30}\right] = 33; \quad N_{237} = \left[\frac{1000}{42}\right] = 23; \quad N_{257} = \left[\frac{1000}{70}\right] = 14; \quad N_{357} = \left[\frac{1000}{105}\right] = 9.$$

Наконец, на все 2, 3, 5 и 7 будет делиться $N_{2357} = \left[\frac{1000}{210}\right] = 4$ числа.

Тогда чисел, которые делятся на 2, 3, 5 и 7 будет

$$(N_2 + N_3 + N_5 + N_7) - (N_{23} + N_{25} + N_{27} + N_{35} + N_{37} + N_{57}) +$$
$$+(N_{235} + N_{237} + N_{257} + N_{357}) - N_{2357} = (500 + 333 + 200 + 142) -$$
$$(166 + 100 + 71 + 66 + 47 + 28) + (33 + 23 + 14 + 9) - 4 = 772.$$

Покажем, что в этой сумме учтено каждое число, которое делится хотя бы на одно из чисел 2, 3, 5 и 7, причём ровно по одному разу. Рассмотрим 4 случая:

1. Пусть некоторое число делится только на одно из чисел 2, 3, 5 или 7. Тогда оно будет учтено только один раз в первой скобке.

2. Пусть некоторое число делится ровно на два числа из 2, 3, 5 или 7. Пусть, например, оно делится на 3 и на 5 (остальные случаи рассматриваются аналогично). Тогда это число мы посчитаем в N_3 и в N_5 со знаком «+» и в N_{35} со знаком «−». А значит, всего оно будет учтено один раз.

3. Пусть некоторое число делится ровно на три числа из 2, 3, 5 или 7. Пусть, например, оно делится на 2, на 5 и на 7 (остальные случаи рассматриваются аналогично). Тогда это число мы посчитаем в N_2, в N_5 и в N_7 со знаком «+», в N_{25}, N_{35} и N_{57} со знаком «−» и в N_{257} со знаком «+». Следовательно, это число будет учтено один раз.

4. Пусть некоторое число делится ровно на 2, 3, 5 и 7. Тогда это число учитывается в каждом слагаемом. В выражении 8 положительных и 7 отрицательных слагаемых, а значит, это число также будет учтено ровно один раз.

Таким образом, число целых положительных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся ни на одно из чисел 2, 3, 5 и 7, равно $1000 - 772 = 228$.

В примере 18 фактически использовалась формула включений-исключений. Рассмотрим её в общем виде.

Пусть есть N предметов и свойства $p_1, \ldots, p_n$. Каждый предмет может одними свойствами обладать, а другими не обладать. Обозначим через $N_{i_1,\ldots,i_k}$ количество предметов, которые обладают свойствами $p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}$ (обладание остальными свойствами — произвольное).

Через $N(r)$ обозначим число предметов, обладающих ровно r свойствами. Положим

$$S_0 = N, \quad S_k = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} N_{i_1,\ldots,i_k} \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Здесь особо отметим, что S_k — просто удобные обозначения, способствующие уменьшению громоздкости выкладок, не стоит за ними усматривать какой-то сакраментальный смысл.

Теорема 1. *Справедливо равенство*

$$N(0) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k S_k.$$

Доказательство. Покажем, что каждый предмет дает одинаковый вклад при подсчете левой и правой частей устанавливаемого равенства.

Пусть предмет не обладает ни одним свойством. Тогда вклад в левую часть будет равен 1, вклад в правую часть будет ненулевым только в слагаемое $S_0 = N$, соответствующее мощности множества всех предметов, и этот вклад тоже равен 1.

Пусть предмет обладает s свойствами, $1 \le s \le n$, и это свойства $p_{j_1}, \dots, p_{j_s}$. Тогда данный предмет дает ненулевой (единичный) вклад в слагаемое $N_{i_1,\dots,i_t}$ тогда и только тогда, когда верно включение

$$\{i_1, \dots, i_t\} \subseteq \{j_1, \dots j_s\}.$$

Вклад этого предмета в левую часть равен нулю, а в правую —

$$\sum_{t=1}^{s} (-1)^t C_s^t,$$

т. е. вклад тоже нулевой.

Суммируя по всем предметам доказанные равенства вкладов в левую и правую часть, получаем справедливость исходного равенства. □

Переформулируем формулу включений-исключений в терминах множеств.

Следствие 1. Справедливо равенство

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}| + \ldots + (-1)^{n+1} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n}|.$$

Пример 19 (задача о беспорядках)**.** Найти точное значение числа подстановок σ симметрической группы S_n, удовлетворяющих условию $\sigma(i) \neq i$ для всех i, $1 \le i \le n$.

Что произойдет, если сумму из правой части формулы включений-исключений оборвать на каком-либо слагаемом? Оказывается, что если последнее выписанное слагаемое положительное (точнее, оно соответствует четному числу свойств), то получается оценка величины $N(0)$ сверху, а в противном случае — снизу.

Теорема 2 (Неравенства Бонферрони)**.** *Для любого l, $0 \le l \le \lfloor (n-1)/2 \rfloor$*

$$\sum_{k=0}^{2l+1} (-1)^k S_k \le N(0) \le \sum_{k=0}^{2l} (-1)^k S_k.$$

Доказательство. Для каждого из неравенств подобно доказательству формулы включений-исключений достаточно установить соответствующее неравенство для вкладов в левую и правую часть доказываемого соотношения каждого из предметов. Нужное неравенство легко следует из равенства

$$\sum_{k=0}^{t}(-1)^k C_n^k = (-1)^t C_{n-1}^t$$

(третье равенство свойства 6 сочетаний). $\square$

Также аналогично формуле включений-исключений можно установить справедливость следующих утверждений.

Теорема 3. *Справедливы равенства*

$$N(r) = \sum_{k=r}^{n}(-1)^{k-r}\binom{k}{r}S_k,$$

$$N_{\geq r} = \sum_{k=r}^{n}(-1)^{k-r}\binom{k-1}{r-1}S_k,$$

где $N_{\geq r}$ — количество предметов, обладающих не менее чем r свойствами.

Пример 20. Доказать теорему 3.

Обозначим через $\varphi(m)$ функцию Эйлера, численно равную количеству натуральных чисел, не превосходящих m и взаимнопростых с m.

Теорема 4. *Пусть $m = p_1^{k_1}\dots p_n^{k_n}$ — разложение числа m на простые множители. Тогда*

$$\varphi(m) = m\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_n}\right).$$

Доказательство. Применим формулу включений-исключений, положив $N = m$ и считая i-м свойством делимость на p_i, $i = 1,\dots,n$. Тогда имеем:

$$\varphi(m) = N(0) = m - \sum_{1\leq i\leq n}\frac{m}{p_i} + \dots + (-1)^k \sum_{1\leq i_1<\dots i_k\leq n}\frac{m}{p_{i_1}\dots p_{i_k}} + \dots$$

$$\dots + (-1)^n\frac{m}{p_1\dots p_n} = m\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_n}\right).$$

$\square$