

# 1 Множества

## 1.1 Основные определения

Понятие множества относится к первичным понятиям, так как нет других, более простых понятий для их определения<sup>1</sup>. Чаще всего под этим словом подразумевается примерно то же самое, что и под словами совокупность, семейство, неупорядоченный набор каких-либо предметов, понятий, объектов. Важно, что эти предметы (понятия, объекты) не повторяются и не упорядочены.

Предметы (понятия, объекты), входящие в множество  $A$ , будут называться элементами множества  $A$ . Отметим, что множества могут быть сами элементами другого множества. Для выражения того факта, что некоторый элемент  $a$  *принадлежит* (соответственно, *не принадлежит*) множеству  $A$  используется обозначение  $a \in A$  (соответственно,  $a \notin A$ ).

**Пример 1.** Рассмотрим множество студентов группы 212 образовательной программы ФиКЛ. Элементами этого множества являются студенты. При этом сама группа, например, входит в множество групп первого курса факультета гуманитарных наук. Если же мы рассмотрим, например, множество объектов, относящихся к первому курсу НИУ ВШЭ и имеющие электронные адреса, то в это множество попадут и собственно студенты группы 212, и сама группа 212 как отдельный элемент.

Как мы можем задавать или описывать множества? Выделим два способа. Во-первых, это перечисление его элементов. При этом перечисляемые элементы заключаются в фигурные скобки<sup>2</sup>.

**Пример 2.**

$$A = \{\text{Петя, Вася, Маша}\}, \quad B = \{0, 3, 15, 28\}, \\ C = \{\text{Москва, Санкт-Петербург, Нижний Новгород, Пермь}\}.$$

Список студентов группы можно также рассматривать как задание множества всех студентов определённой группы перечислением.

Во-вторых, это описание множества, его характеристик и свойств.

**Пример 3.**

$D$  — множество студентов 1 курса ФГН, посещающих курс дискретной математики;

$E$  — множество чисел, удовлетворяющих равенству  $x(x - 3)(x - 15)(x - 28) = 0$ ;

$F$  — множество городов, в которых есть кампусы НИУ ВШЭ;

$G$  — множество всех городов России;

$\mathbb{Z}$  — множество всех целых чисел;

$\mathbb{Q}$  — множество всех рациональных чисел.

---

<sup>1</sup>Тут напрашивается некоторое сравнение с толковым словарём, в котором получается либо «зацикленность» статей, либо какие-то слова остаются необъяснёнными.

<sup>2</sup>В фигурные скобки принято заключать неупорядоченные наборы элементов. Если же набор элементов упорядочен, то его обычно заключают в круглые скобки. В качестве примера упорядоченного набора можно вспомнить запись набора координат точки или вектора.

Два множества  $A$  и  $B$  считаются *равными* в том и только в том случае, когда они состоят из одних и тех же элементов. Равенство множеств  $A$  и  $B$  обозначается  $A = B$ .

**Пример 4.** Равными являются множества  $B$  и  $E$ ,  $C$  и  $F$  из примеров ?? и ??.

Если каждый элемент множества  $A$  является также элементом множества  $B$ , то  $A$  называется *подмножеством* множества  $B$ . Будем обозначать этот факт как  $A \subseteq B$ . Для строгого включения, то есть когда  $A$  является подмножеством множества  $B$ , но не совпадает с множеством  $B$ , будем использовать обозначение<sup>3</sup>  $A \subsetneq B$ .

**Пример 5.** Среди множеств из примеров ?? и ?? некоторые являются подмножествами других. Так, например,  $B \subseteq \mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ ,  $B \subseteq \mathbb{R}$ ,  $C \subseteq G$ , а также  $B \subseteq E$ ,  $E \subseteq B$ .

Отметим следующие свойства, которые следуют напрямую из определений. Пусть  $A$ ,  $B$ ,  $C$  — произвольные множества.

1. Рефлексивность. Каждое множество является подмножеством самого себя:  $A \subseteq A$ .
2. Транзитивность. Если одно множество является подмножеством другого, а то, в свою очередь, является подмножеством третьего, то первое множество является подмножеством третьего. Из соотношений  $A \subseteq B$  и  $B \subseteq C$  следует включение  $A \subseteq C$ .
3. Множества равны тогда и только тогда, когда каждое из них является подмножеством другого:  $A = B$  тогда и только тогда, когда  $A \subseteq B$ ,  $B \subseteq A$ .

Последним свойством часто пользуются для доказательства равенства множеств. Сначала доказывают тот факт, что первое является подмножеством второго, а потом то, что второе является подмножеством первого. Другими словами, для произвольного элемента из первого множества показывают, что он является элементом второго множества и наоборот.

Множество, не содержащее никаких элементов, называется *пустым* и обозначается через<sup>4</sup>  $\emptyset$ .

Отметим свойства пустого множества, следующие непосредственно из его определения. Пусть  $A$  — произвольное множество. Тогда выполняются следующие соотношения.

1. Пустое множество является подмножеством любого множества:  $\emptyset \subseteq A$ .
2. Если какое-то множество является подмножеством пустого множества, то оно само является пустым множеством: если  $A \subseteq \emptyset$ , то  $A = \emptyset$ .

**Пример 6.** Найдём все подмножества множества  $\{0, 1, 2\}$ . Это  $\emptyset$ ,  $\{0\}$ ,  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{0, 1\}$ ,  $\{0, 2\}$ ,  $\{1, 2\}$   $\{0, 1, 2\}$ .

---

<sup>3</sup>Обозначение  $A \subset B$  в разных источниках может использоваться как для обозначения произвольного подмножества, так и для обозначения строгого включения, то есть такого, когда множество  $A$  является подмножеством множества  $B$ , но не совпадает с множеством  $B$ .

<sup>4</sup>Отметим, что пустое множество единственное для любых задач и описаний. Например, если мы в одном случае говорим про студентов, а в другом случае — про книги, то в обоих случаях пустое множество будет одно и то же.

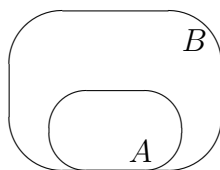
Рассмотрим более общий случай. Пусть множество  $A$  содержит  $n$  элементов. Тогда существует  $2^n$  подмножеств множества  $A$  (включая само множество  $A$  и пустое множество). Действительно, каждый элемент множества  $A$  содержится в его подмножестве или не содержится, то есть для каждого из  $n$  элементов есть два варианта «его состояния» относительно подмножества множества  $A$ . А значит, всего  $\underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_n$  вариантов различных подмножеств.

Очень полезным оказывается схематическое (графическое) изображение множеств. Для множества  $A$  рисуем некоторую фигуру (которую нам удобно, чаще всего получается некоторое подобие круга). Точки этой фигуры или некоторые точки внутри этой фигуры будут обозначать элементы множества  $A$ . Если необходимо рассматривать несколько множеств, то нужно нарисовать соответствующее число фигур.

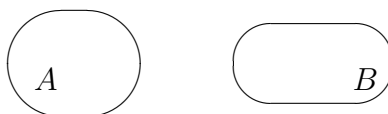


Такие изображения называются кругами Эйлера<sup>5</sup>. Они помогают наглядно представить себе взаимное расположение множеств и подсказать возможные пути решения, однако их нельзя использовать для строгих доказательств (в том числе и в решении задач недостаточно приводить лишь изображение множеств кругами Эйлера).

**Пример 7.** Если мы знаем, что множество  $A$  является подмножеством множества  $B$ , то естественным изображением будет примерно такое:




Если же мы знаем, что множества  $A$  и  $B$  не содержат общих элементов, то стоит так и изображать:



## 1.2 Операции над множествами.

*Объединением* множеств  $A$  и  $B$  называется множество, состоящее из всех элементов, содержащихся хотя бы в одном из множеств  $A$  или  $B$  и только из них. Объединением множеств  $A$  и  $B$  обозначается  $A \cup B$ .

<sup>5</sup>В некоторых источниках, особенно переводных источниках можно чаще встретить понятие «Диаграммы Венна».




art/cup\_sets.jpg

Рис. 1:

**Пример 8.** Пусть  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ . Тогда  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11\}$ .

*Пересечением* множеств  $A$  и  $B$  называется множество, состоящее из всех элементов, которые одновременно принадлежат множеству  $A$  и множеству  $B$ , и только из них. Пересечение множеств  $A$  и  $B$  обозначается  $A \cap B$ . Также достаточно распространённым для пересечения множеств является обозначение  $AB$ .



art/cap\_sets.jpg

Рис. 2:

**Пример 9.** Пусть  $A$  — множество символов заглавных букв русского алфавита,  $B$  — множество заглавных букв английского алфавита. Тогда<sup>6</sup>  
 $A \cap B = \{A, B, C, E, H, K, M, O, P, T, X\}$ .

---

<sup>6</sup>Для определённости считаем, что символы  $Y$  и  $У$  различны.

*Разностью* множеств  $A$  и  $B$  называется множество тех элементов множества  $A$ , которые не принадлежат множеству  $B$ . Разность множеств  $A$  и  $B$  обозначается  $A \setminus B$ .



Рис. 3:

**Пример 10.** Рассмотрим множества  $A$  и  $B$  из примера ???. Тогда

$$A \setminus B = \{\text{Б, Г, Д, Ё, Ж, З, И, Й, Л, П, У, Ф, Ц, Ч, Ш, Щ, Ъ, Ы, Ь, Э, Ю, Я}\}$$
$$B \setminus A = \{\text{D, F, G, I, J, L, N, Q, R, S, U, V, W, Y, Z}\}$$

*Дополнением* множества  $A$  (или отрицанием множества  $A$ ) называется множество всех элементов, не принадлежащих множеству  $A$ . Обозначается  $\bar{A}$ . Операция дополнения подразумевает некоторое универсальное множество  $U$ , такое что  $A \subseteq U$ .

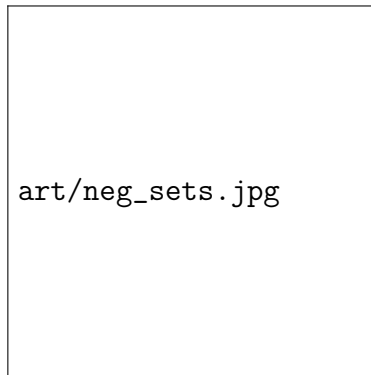


Рис. 4:

Если в задаче речь идёт о нескольких множествах, то универсальное множество должно содержать их все. Кроме того, универсальное множество не должно быть слишком большим: если мы говорим про множество целых чисел, то включать в универсальное множество иррациональные числа, геометрические фигуры, окна здания или преподавателей дискретной математики не имеет смысла. Во многих задачах в качестве универсальных множеств удобно использовать следующие множества:

$\mathbb{N}$  — множество натуральных чисел,

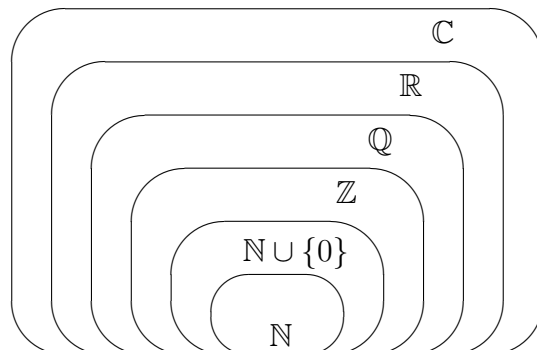
$\mathbb{N} \cup \{0\}$  — множество целых неотрицательных чисел,

$\mathbb{Z}$  — множество целых чисел,

$\mathbb{Q}$  — множество рациональных чисел,  
 $\mathbb{R}$  — множество действительных чисел,  
 $\mathbb{C}$  — множество комплексных чисел. В зависимости от контекста задачи для множества натуральных чисел универсальным множеством могут быть следующие множества:  $\mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ .

Нетрудно заметить следующие включения:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}.$$



*Симметрической разностью* множеств  $A$  и  $B$  называется множество, состоящее из тех элементов, которые принадлежат ровно одному из множеств  $A$  и  $B$ . Симметрическая разность множеств  $A$  и  $B$  обозначается  $A \Delta B$ . Симметрическую разность можно определить также следующим образом:  $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ . Нетрудно видеть, что  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ .

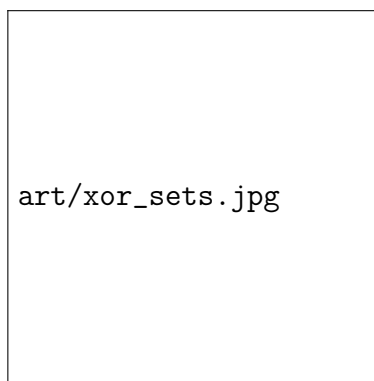


Рис. 5:

**Пример 11.** Рассмотрим множества  $A$  и  $B$  из примера ???. Тогда  $A \Delta B = \{2, 4, 7, 9, 11\}$

Свойства операций над множествами. Пусть  $A, B, C$  — произвольные множества,  $U$  — (универсальное) множество, такое что  $A \subseteq U$ ,  $B \subseteq U$ ,  $C \subseteq U$ .

1. Идемпотентность<sup>7</sup>.  $A \cap A = A \cup A = A$  (объединение множество с самим собой, как и пересечение с самим собой, сохраняет исходное множество)

<sup>7</sup>Названия запоминать необязательно, но бывает, что с названиями запоминать проще. Например, кому-то может быть интересна этимология слов.

2. Если  $A \subseteq B$ , то  $A \cap B = A$ ,  $A \cup B = B$  (если одно из множеств является подмножеством другого, то вложенное множество является их пересечением, а включающее — их объединением).
3. Свойства нуля.  $A \cap \emptyset = \emptyset$  (пересечение любого множества с пустым множеством снова даёт пустое множество),  $A \cup \emptyset = A$  (объединение любого множества с пустым множеством не меняет исходное множество). Отметим, что это является частным случаем свойства ??.
4. Свойства единицы.  $A \cap U = A$  (пересечение любого множества с универсальным множеством даёт исходное множество),  $A \cup U = U$  (объединение любого множества с универсальным множеством даёт универсальное множество). Отметим, что это является частным случаем свойства ??.
5. Коммутативность или «переместительный закон».  $A \cap B = B \cap A$ ,  $A \cup B = B \cup A$ ,  $A \Delta B = B \Delta A$  (от перестановки компонент при объединении, пересечении и симметрической разности множеств результат не меняется).
6. Ассоциативность или «сочетательный закон».  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ ,  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ ,  $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$  (выполнение объединений (пересечений, симметрических разностей) в произвольном порядке; это свойство позволяет опускать скобки, если записывается несколько объединений (пересечений, симметрических разностей) подряд).
7. Дистрибутивность или «распределительный закон».  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$  (объединение пересечения двух множеств с третьим совпадает с пересечением объединений третьего множества с каждым из первых двух),  
 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$  (пересечение объединения двух множеств с третьим совпадает с объединением пересечений третьего множества с каждым из первых двух).
8. Законы де Моргана.  $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$  (дополнение к объединению множеств совпадает с пересечением дополнений этих множеств),  
 $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$  (дополнение к пересечению множеств совпадает с объединением дополнений множеств).
9. Закон двойного дополнения (отрицания?).  $\overline{\bar{A}} = A$ . Дополнение дополнения множества  $A$  совпадает с самим множеством  $A$ .

На всякий случай напомним, что все равенства работают в обе стороны. Так, например, для некоторых преобразований бывает удобно вместо множества  $A$  записывать  $\bar{\bar{A}}$ , а, например, дистрибутивность — это не только «раскрытие скобок», но и «вынесение за скобки общего множителя». *Как-то надо это отметить, а то есть такая проблема — об этом забывают...*

## 2 Отображения и мощности множеств (дополнительный раздел)

### 2.1 Отображения множеств

Пусть заданы множества  $X$  и  $Y$ . Отображением  $\phi$  множества  $X$  в множество  $Y$  называется правило, по которому каждому элементу множества  $X$  ставится в соответствие единственный элемент множества  $Y$ . Часто используется обозначение  $\phi : X \rightarrow Y$ .

**Пример 12.** Знакомые из школьного курса математики функции, заданные на множестве действительных чисел  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , являются примерами отображений. Например  $f(x) = x^2$ ;  $f(x) = \sin x$ .

**Пример 13.** Отображение из множества натуральных чисел в множество чётных чисел:  $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 4, \dots, s \rightarrow 2s, \dots$  (каждому числу ставится в соответствие в два раза большее число)

**Пример 14.** Отображение множества студентов НИУ ВШЭ в множество номеров студенческих билетов.

Выделяют следующие типы отображений:

*Сюръективное отображение (сюръекция, отображение «на»)* — отображение вида  $f : X \rightarrow Y$ , при котором для любого элемента  $y$  из множества  $Y$  найдётся элемент  $x$  из множества  $X$ , такой что  $f(x) = y$ .

Рассмотрим следующий пример-иллюстрацию. Пусть у нас есть раздевалка для верхней одежды, в которой куртки (будем считать, что там только куртки) как-то висят на крючках. Тогда мы имеем отображение множества курток на множество крючков. Отображение сюръективно, если все крючки заняты (но на некоторых может висеть больше одной куртки).

*Инъективное отображение (инъекция, отображение «в»)* — отображение вида  $f : X \rightarrow Y$ , при котором различным элементам множества  $X$  поставлены в соответствие различные элементы множества  $Y$ . Иными словами, в любой элемент  $y$  из множества  $Y$  отображается либо один элемент из множества, либо таких элементов нет вообще.

Для примера с раздевалкой отображение сюръективно, если ни на каком крючке висит не больше одной куртки (но могут быть пустые крючки).

*Биективное отображение (биекция, взаимно однозначное отображение)* — отображение, которое является одновременно сюръективным и инъективным.

Для примера с раздевалкой отображение биективно, если на каждом крючке висит ровно одна куртка.

**Пример 15.** Отображение  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  по правилу  $n \rightarrow 2n$  является инъекцией.

**Пример 16.** Отображение  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  по правилу  $n \rightarrow -n$  является биекцией.

**Пример 17.** Отображение  $\mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$  по правилу  $x \rightarrow \sin x$  является сюръекцией.