Департамент политической науки, 2023-24 уч. год
Высшая математика
Лекция 7. Пределы последовательностей и функций. (19.10.2023)
Д.А. Филимонов

1 Последовательности и определение предела.

Если взять несколько последовательностей чисел, то для некоторых можно указать, к какому числу будут приближаться (математики говорят «стремиться») элементы такой последовательности. Иногда такого числа вовсе нет, а иногда это не число, а, например, бесконечность. Если же такое число существует, его называют пределом последовательности.

$$1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \ldots;\ \frac{1}{n};\ \ldots\ \to\ 0$$

$$\frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{4};\ \frac{4}{5};\ \ldots;\ \frac{n}{n+1};\ \ldots\ \to\ 1$$

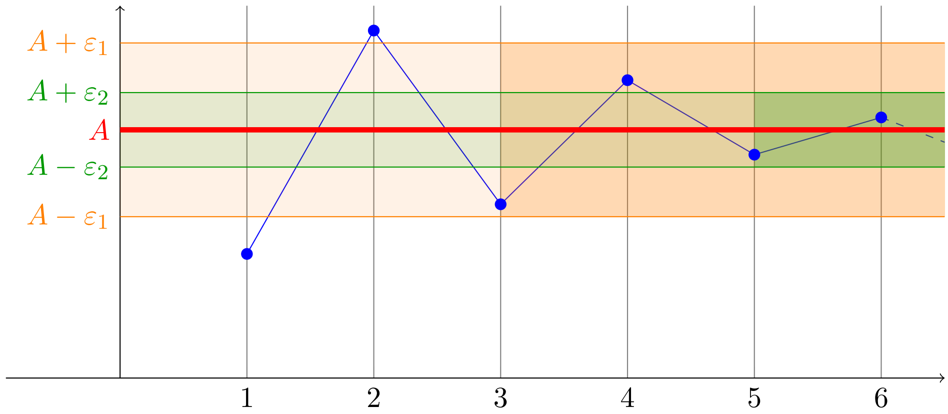
$$-1;\ 1;\ -1;\ 1;\ \ldots;\ (-1)^n;\ \ldots\ \not\to$$

$$1;\ 2;\ 3;\ 4;\ \ldots;\ n;\ \ldots\ \to\ +\infty$$

Для начала, необходимо строго определить, что вообще называть последовательностью чисел. Написать просто «написанные в строчку числа» не подходит, однако можно это формализовать строго. Последовательность это когда по натуральному номеру мы всегда можем сказать, чему равен соответствующий элемент последовательности. Поэтому последовательность — это функция натурального аргумента. Но принято сам аргумент (номер элемента последовательности) записывать не как аргумент функции, а нижним индексом: $\{x_n\}$ — последовательность, занумерованная натуральными индексами n.

С определением предела все несколько сложнее: последовательность может стремиться к конкретному числу с разных сторон, «прыгать» как угодно вокруг предельного значения. Поэтому нужен другой подход. Что означает, что элементы последовательности куда-то приближаются? это означает, что они оказываются все ближе и ближе к пределу. Иными словами, если взять небольшой отрезок вокруг того числа, которое мы считаем пределом, начиная с некоторого номера последовательности, все элементы с бóльшими номерами будут попадать в этот отрезок. И такое свойство должно выполняться для всех сколь угодно маленьких отрезков. Если нарисовать элементы последовательности как точки (ведь последовательность это функция натурального аргумента), то упомянутые отрезки превратятся в полоски.

На рисунке ниже точки последовательности (синие кружки) соединены тонкими линиями, чтобы лучше было видно поведение последовательности. Красной линией обозначен предел последовательности. Кроме того, изображены две полоски: оранжевого цвета пошире для ε_1 и зелёного цвета поуже для ε_2. Для ε_1 все элементы, начиная с третьего, попадают в оранжевую полоску, а для ε_2 приходится уже брать все элементы последовательности начиная с пятого.



2 Свойства пределов.

Пределы довольно удобно сочетаются со всеми четырьмя арифметическими действиями. Если существуют пределы последовательностей в левой и правой частях равенства, то

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n) \pm \lim_{n\to\infty}(y_n)$$

и

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n) \cdot \lim_{n\to\infty}(y_n)$$

Для того, чтобы можно было делить, необходимо, чтобы знаменатель не обращался в ноль. Поэтому, помимо требования существования пределов последовательностей, появляются два дополнительных условия: если $y_n \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n) \neq 0$, то

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(y_n)}$$

Выше мы видели, что не всегда предел является числом, иногда хотелось бы написать символ бесконечности. Определение предела в этом случае придётся немного видоизменить, однако общая его суть останется той же самой. Формально в таком случае появятся три варианта предела: $\{-\infty, +\infty, \infty\}$. Последнее — это беззнаковая бесконечность. то есть последовательность все время увеличивается по модулю, но ее знак все время меняется.

Оказывается, что в случае когда предел знаменателя обращается в ноль, можно добавить ещё два свойства, если пользоваться введённым выше понятием бесконечности как предела.

$$\text{Если } \lim_{n\to\infty}(x_n) = \infty, \text{ то } \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_n}\right) = 0.$$

$$\text{Если } \lim_{n\to\infty}(x_n) = 0, \text{ и при этом } x_n \neq 0, \text{ то } \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_n}\right) = \infty.$$

Иногда, например, если $x_n > 0$, можно указать ещё и знак бесконечности, однако тут проще всего смотреть в каждом конкретном случае.

3 Известные пределы.

Арифметические свойства пределов помогают их считать, однако нужно с чего-то начинать. К счастью, пределы большинства часто встречающихся функций легко получить из их графиков или просто зная их поведение:

$$\lim_{n\to\infty}(c) = c$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^k\right) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } k > 0 \\ 0, & \text{если } k < 0 \end{cases}$$

$$\text{В частности, если } k > 0 \text{, то } \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^k}\right) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}(a^n) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } a > 1 \\ 0, & \text{если } 0 < a < 1 \\ 0, & \text{если } -1 < a < 0 \text{ (поскольку } n \in \mathbb{N}\text{, } a \text{ может быть и отрицательным)} \\ \infty, & \text{если } a < -1 \end{cases}$$

Некоторые пределы уже требуют подсчёта через определение или применения каких-то хитрых методов для вычисления

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{a}) = 1\text{, если } a > 0$$

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n}) = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^n}{n^k}\right) = +\infty\text{, если } a > 1 \text{ и } k > 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^k}{a^n}\right) = 0\text{, если } a > 1 \text{ и } k > 0$$

Наконец, бывают совершенно нетривиальные примеры, которые также нельзя просто свести к известным с помощью арифметических действий.

3.1 Второй замечательный предел.

Есть два удивительных предела, и мы разберём тот, который идёт в математике под номером два: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Основание степени в этом примере стремится к 1, то есть естественно ожидать, что предел тоже будет равен 1. С другой стороны, показатель степени стремится к $+\infty$, а любое число большее 1 в бесконечной степени даёт бесконечность. Получается такое перетягивание каната, которое в общем случае может кончится любым результатом, от 1 и до бесконечности. Однако оказывается, что в данном конкретном случае получается боевая ничья - предел равен числу, большему единицы, но не бесконечности.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2.718281828459045\ldots$$

Этот предел равен числу Эйлера — иррациональному числу, первые знаки которого указаны выше. Как мы далее увидим, это число ещё не раз встретится нам в математическом анализе, так что не удивительно, что оно появилось уже в самом начале.

4 Неопределенности.

Выше среди пределов уже встречались такие, где ответ был не очевиден и сразу воспользоваться арифметическими правилами не было никакой возможности. В таком случае говорят, что имеется *неопределённость*, а преодоление этих трудностей (как правило путём каки-то преобразований выражения) называется *раскрытием неопределённостей*. Самих неопределённостей можно придумать довольно много, однако наиболее встречающихся типов не так много. Как правило, они все связаны с тем, что либо один из пределов в арифметическом действии равен бесконечности, либо знаменатель дроби равен нулю, либо же предел чем-то напоминает неопределённость для второго замечательного предела. Поскольку просто так подставлять бесконечность в формулы или делить на ноль нельзя, разные типы неопределённостей записывают в квадратных скобках, подчёркивая, тем самым, что это лишь некая формальная запись. Вот некоторый список наиболее часто встречающихся неопределённостей:

$$\left[\frac{\infty}{\infty}\right];\ \left[\frac{0}{0}\right];\ [\infty\cdot 0];\ [\infty-\infty];\ [1^{\infty}];\ [\infty^{0}]$$

Решения задач, как правило, сводятся к изучению методов раскрытия неопределённостей, так что рассмотрим пример. Для того, чтобы разрешить неопределённость первого типа (бесконечность делить на бесконечность), как правило, достаточно числитель и знаменатель дроби поделить на старшую степень знаменателя.

Пример 1. $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{5n-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}}{5-\frac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5-\frac{1}{n}\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(3)+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}(5)-\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{3}{5}$

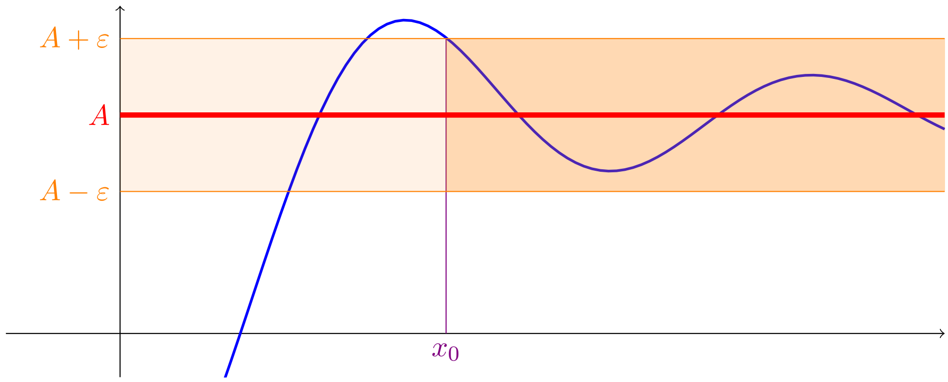
Можно видеть, что после деления на n, у числителя и знаменателя дроби уже оказываются конечные и ненулевые пределы, а, следовательно, результат можно получить из известных пределов с использованием арифметических свойств. Однако запись выше весьма громоздка, поэтому на письме часто пользуются краткой формой, зачёркивая стрелочкой то, что стремится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{5n-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{3+\cancelto{0}{\frac{2}{n}}}{5-\cancelto{0}{\frac{1}{n}}} = \frac{3}{5}$$

5 Пределы функций на $\pm\infty$.

Мы уже обсуждали, что для определения пределов удобно пользоваться поведением соответствующих функций. Ничто не мешает теперь вместо натуральных аргументов рассматривать произвольный аргумент x. По сравнению с пределами последовательностей, появятся всего пара отличий: во-первых, x может теперь стремиться к минус бесконечности, а, значит, необходимо будет каждый раз указывать знак бесконечности, а во-вторых, теперь придётся следить за тем, чтобы функция была определена при всех достаточно больших (или достаточно малых, если стремление к $-\infty$) значениях аргумента и учитывать поведение при всех x.

В определении нам теперь не нужно искать номера элементов последовательности, а достаточно брать все x бо́льшие чем некое x_0.



Как и ранее, большинство значений пределов элементарных функций можно получить из их графиков:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^a)=\begin{cases}+\infty, & \text{если } a>0\\ 0, & \text{если } a<0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x^n)=\begin{cases}+\infty, & \text{если } n>0 \text{ и } n\in\mathbb{N} \text{ — чётное}\\ -\infty, & \text{если } n>0 \text{ и } n\in\mathbb{N} \text{ — нечётное}\\ 0, & \text{если } n<0 \text{ и } n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(a^x)=\begin{cases}+\infty, & \text{если } a>1\\ 0, & \text{если } 0<a<1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty}(a^x)=\begin{cases}0, & \text{если } a>1\\ +\infty, & \text{если } 0<a<1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\mathrm{arctg}x)=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}(\mathrm{arctg}x)=-\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\mathrm{arcctg}x)=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}(\mathrm{arcctg}x)=-\pi$$

Если функция не определена при всех достаточно больших значениях аргумента, то ее предел на бесконечности не имеет смысла и потому говорят, что он не существует.

$$\lim_{x\to+\infty}(\arcsin x) \text{ не существует}$$

Также предел не может существовать если функция колеблется и не приближается ни к какому значению, или же вообще не определена в каких-то точках, которые все время встречаются при возрастании аргумента.

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin x) \text{ не существует}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\mathrm{tg} x) \text{ не существует}$$

Вообще говоря, пределы последовательностей и пределы функций на бесконечности выглядят почти идентичными, различающимися лишь тем, что для последовательностей мы используем букву n в качестве аргумента, а для функций более привычную букву x. Тем не менее, бывают случаи, когда результаты отличаются.

$$\lim_{n\to\infty}(\sin \pi n) \;=\; 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin \pi x) \text{ не существует}$$

Все дело в том, что в случае последовательности нас интересуют только значения при *натуральных* n, а в этих точках $\sin \pi n = 0$. В случае же предела функции приходится учитывать поведение синуса во всех точках вообще, а он не приближается с ростом аргумента ни к какой фиксированной точке.