

Департамент политической науки, 2023-24 уч. год

Высшая математика

Лекция 2. Элементы финансовой математики, часть 2: кредиты, приведение к сегодняшнему дню и эффективная процентная ставка (13.09.2023)

И. А. Хованская, Р. Я. Будылин, И. В. Щуров, Д. А. Филимонов

## 1 Кредиты

**Задача 1.** Пусть Некто взял в банке кредит на сумму \$100000 под 10% годовых. Рассмотрим следующие возможности возвращения кредита:

- Ежегодно Некто возвращает банку \$10000 долга и набежавшие за этот год проценты.
- Ежегодно Некто выплачивает банку \$20000, включающие в себя проценты и погашение долга, пока не выплатит весь долг. (Это называется *аннуитетные платежи*.) В последний год, вообще говоря, платёж может быть другим.<sup>1</sup>

Описать структуру платежей за первые годы. Каким способом долг будет выплачен быстрее?

**Решение.** а) Стандартные выплаты плюс проценты. (Такие платежи называются *дифференцированными*.)

Первый платёж состоит из ежегодных \$10000 и 10% от всей суммы долга:

$$10000 + 100000 \cdot \frac{10}{100} = 20000$$

После этой выплаты Некто остался должен банку \$90000, см. табл 1.

Сумма кредита	Погашение тела кредита	Проценты по кредиту	Сумма выплат за год	Тело кредита на начало следующего года
100'000	10'000	$0.1 \times 100'000 = 10'000$	$10'000 + 10'000 = 20'000$	$100'000 - 10'000 = 90'000$
90'000	10'000	$0.1 \times 90'000 = 9'000$	$10'000 + 9'000 = 19'000$	$90'000 - 10'000 = 80'000$
80'000	10'000	$0.1 \times 80'000 = 8'000$	$10'000 + 8'000 = 18'000$	$80'000 - 10'000 = 70'000$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
10'000	10'000	$0.1 \times 10'000 = 1000$	$10'000 + 1000 = 11'000$	$10'000 - 10'000 = 0$

Таблица 1: Погашение кредита: дифференцированная схема

Второй платёж состоит из ежегодных \$10000 и 10% от оставшейся суммы долга:

$$10000 + 90000 \cdot \frac{10}{100} = 19000$$

<sup>1</sup>На самом деле, обычно сумма ежегодного платежа при аннуитетной схеме подбирается точно таким образом, чтобы все платежи были равными, но мы для упрощения вычислений разрешим платежу в последний год отличаться. Расчёт аннуитетного платежа мы обсудим в конце лекции.

Сумма кредита	Ежегодная выплата	Проценты по кредиту	Погашение тела кредита	Тело кредита на начало следующего года
100'000	20'000	$0.1 \times 100'000 = 10'000$	$20'000 - 10'000 = 10'000$	$100'000 - 10'000 = 90'000$
90'000	20'000	$0.1 \times 90'000 = 9'000$	$20'000 - 9'000 = 11'000$	$100'000 - 11'000 = 79'000$
79'000	20'000	$0.1 \times 79'000 = 7'900$	$20'000 - 7'900 = 12'100$	$79'000 - 12'100 = 66'900$
66'900	20'000	$0.1 \times 66'900 = 6'690$	$20'000 - 6'690 = 13'310$	$66'900 - 13'310 = 53'590$
53'590	20'000	$0.1 \times 53'590 = 5'359$	$20'000 - 5'359 = 14'641$	$53'590 - 14'641 = 38'949$
38'949	20'000	$0.1 \times 38'949 = 3'894,9$	$20'000 - 3'894,9 = 16'105,1$	$38'949 - 16'105,1 = 22'843,9$
22'843,9	20'000	$0.1 \times 22'843,9 = 2'284,39$	$20'000 - 2'284,39 = 17'715,61$	$22'843,9 - 17'715,61 = 5128,29$
5'128,29	$5'128,29 + 0.1 \times 5'128,29 = 5'641,119$	$0.1 \times 5'128,29 = 512,829$	$5641,119 - 512,829 = 5'128,29$	$5'128,29 - 5'128,29 = 0$

Таблица 2: Погашение кредита: аннуитетная схема

После этой выплаты Некто остался должен банку \$80000

Третья выплата составит:

$$10000 + 80000 \cdot \frac{10}{100} = 18000$$

Выплата долга займёт ровно 10 лет: каждый год долг уменьшается на \$10000

б) Стандартные выплаты, включающие проценты. (Такие платежи называются *аннуитетными*.)

В первый платёж входят 10% от всей суммы кредита, остальная сумма идёт на погашение долга:

$$20000 - 100000 \times \frac{10}{100} = 10000$$

После этой выплаты Некто остался должен банку \$90000 (см. табл. 2). Во второй платёж входят 10% от оставшейся суммы кредита, на погашение долга идёт:

$$20000 - 90000 \times \frac{10}{100} = 11000$$

После этой выплаты Некто остался должен банку \$90000 - \$11000 = \$79000

В третий платёж входят 10% от оставшейся суммы кредита, на погашение долга идёт:

$$20000 - 79000 \times \frac{10}{100} = 12100$$

После этой выплаты Некто остался должен банку \$79000 - \$12100 = \$66900

За последующие годы выплаты будут такими:

$$4. 20000 = 6690 + 13310 \text{ Долг: } 66900 - 13310 = 53590$$

$$5. 20000 = 5359 + 14641 \text{ Долг: } 53590 - 14641 = 38949$$

$$6. 20000 = 3894,9 + 16105,1 \text{ Долг: } 38949 - 16105,1 = 22843,9$$

$$7. 20000 = 22\,843,39 + 17\,715,61 \text{ Долг: } 22\,843,9 - 17\,715,61 = 5128,29$$

$$8. 5\,641,119 = 5\,128,29 + 512,829 - \text{оставшийся долг и проценты на него набравшие.}$$

Итак, при первой схеме платежей срок выплаты составит 10 лет, общая сумма выплат будет \$155\,000, при второй схеме срок платежей будет меньше, общая сумма выплат составит \$145\,128. ■

## 2 Приведение к сегодняшнему дню

Деньги имеют ценность не только абсолютную, но и относительную: 10\$ сейчас и 100 лет назад это совершенно разные вещи. Для того чтобы понять, как соотносятся между собой суммы в разные моменты времени, нам нужно уметь сравнивать деньги, полученные сегодня с деньгами, которые будут, скажем, через год (или которые были год назад).

Пусть процентная ставка в некотором банке для обычного вклада составляет 6% годовых. Пусть у нас есть 1000 рублей сейчас. Это значит, что мы совершенно определённо можем получить через год 1060 рублей. С другой стороны, предположим, мы знаем, что нам заплатят 1000 рублей, но только через год. В каком-то смысле, это то же самое, что мы имеем 1000/1,06 рублей сегодня: обладание именно такой суммой гарантирует нам выплату наших 1000 рублей через год. Мы будем говорить *о стоимости, приведённой к сегодняшнему дню*. Итак, если банк установил процентную ставку  $a\%$ , то стоимость 1000 рублей, полученных через год, приведённая к сегодняшнему дню составит  $1000 / (1 + \frac{a}{100})$  рублей, стоимость 1000 рублей, полученных через два года, приведённая к сегодняшнему дню составит  $1000 / (1 + \frac{a}{100})^2$  рублей, а стоимость 1000 рублей, полученных через  $n$  лет, приведённая к сегодняшнему дню составит  $1000 / (1 + \frac{a}{100})^n$  рублей.

На практике вместо ставки по вкладу в банке может быть любая ставка: кредита, инфляции, доходности бизнеса, а в общем случае сумма всех этих ставок с весовыми коэффициентами, отвечающими, например, рискам. Такая ставка в общем случае называется ставкой дисконтирования.

Разумеется, можно не только говорить про одну сумму, но и считать *Чистую Приведённую Стоимость* (Net Present Value): сумму всех денежных потоков (со знаком), приведённых к сегодняшнему дню по ставке дисконтирования.

## 3 Эффективная процентная ставка

Обсуждая кредит в банке, мы исходим из того, что нам известна процентная ставка кредита. В жизни часто встречаются ситуации, когда процентная ставка неизвестна: люди или организации могут договориться о сложных выплатах в разные сроки, скажем, сам кредит выдаётся не единовременно, а по частям, возвращение долга происходит определёнными суммами через какой-то срок. Как по этим данным сказать, под какие именно проценты выдан кредит? С таким же вопросом сталкиваются люди, берущие кредит в банке, где кроме выплат по кредиту есть дополнительные выплаты — за обслуживание кредита, открытие и поддержание счета и т. д.

**Задача 2.** Рассмотрим такую схему кредита. Банк выдаёт заёмщику 5000 долларов, через год снова выдаёт 5000 долларов, через два года заёмщик возвращает 12000 долларов. Под какой процент выдан такой кредит?

Ответ: пусть процентная ставка банка составляет  $a\%$ . Приведём к сегодняшнему дню все произведённые выплаты. Стоимость \$5000, полученных сразу, составляет \$5000, а стоимость \$5000, полученных через год составит  $5000 / (1 + \frac{a}{100})$ . Стоимость возвращённых \$12000 составит  $12000 / (1 + \frac{a}{100})^2$ . Чтобы были возвращены все занятые деньги, должно выполняться равенство

$$5000 + \frac{5000}{1 + \frac{a}{100}} = \frac{12000}{(1 + \frac{a}{100})^2}$$

Мы получили уравнение на неизвестное  $a$ . Решения этого уравнения  $a_1 = -10\sqrt{265} - 150 < 0$  и  $a_2 = 10\sqrt{265} - 150 \approx 12,788$ . Первый корень отрицательный, второй даёт нам ответ к задаче: банк выдал деньги под приблизительно 12,8% годовых.

**Определение 1.** Эффективной процентной ставкой называется такая процентная ставка, при которой сумма стоимостей всех финансовых потоков, приведённая к сегодняшнему дню, равна нулю.

Почему финансовые потоки приводятся именно к сегодняшнему дню, а не к, скажем, дню последних выплат? Дело в том, что эффективная ставка процента не зависит от того дня, к которому приводятся платежи. Действительно, приведём в примере 2 все платежи к дню последней выплаты. Тогда первые \$5000 получены за два года до этого дня, а значит, на эти деньги можно было дважды получить годовые проценты. Через два года \$5000 превратятся в  $5000 \cdot (1 + \frac{a}{100})^2$ . Аналогично, вторая выплата получена за год до дня расчёта, а значит, вторые \$5000 превратятся в  $5000 \cdot (1 + \frac{a}{100})$ . \$12000 возвращаются в день расчёта, никаких процентов в этом случае на эти деньги не возвращается. Итак, мы получаем уравнение

$$5000 \cdot \left(1 + \frac{a}{100}\right)^2 + 5000 \cdot \left(1 + \frac{a}{100}\right) = 12000$$

Если разделить это равенство на  $(1 + \frac{a}{100})$ , мы получим то же уравнение, что и в примере 2.

Обсуждая и сравнивая кредиты, мы используем понятие «эффективная процентная ставка» (Effective Interest Rate). Аналогичные вопросы встают, когда сравниваются любые финансовые проекты: планируются вложения денег и платежи по ним в разные сроки. В этом случае для сравнения проектов используется «внутренняя норма доходности» (Internal Rate of Return). Это аналогичное понятие, вычисляется так же.

## 4 Расчёт аннуитетных платежей.

После ведения понятия приведения платежей к сегодняшнему дню, мы можем рассчитать каким должен быть платёж в схеме аннуитетных выплат по кредиту. Напомним, в этом случае все платежи должны быть одинаковыми (включая последний, а не как было в примере в начале лекции). Для расчёта приведём все платежи к дню взятия кредита. Обозначим сумму кредита за  $T$ , искомый нами платёж за  $R$ , ставку кредита  $\alpha\%$  годовых и  $n$  — количество лет, на которые мы берём кредит. Для удобства введём обозначение  $i = \frac{\alpha}{100}$ . Тогда  $k$ -й платёж (платёж через  $k$  лет после взятия кредита), приведённый к сегодняшнему дню будет составлять  $\frac{R}{(1+i)^k}$ . С другой стороны, все платежи, приведённые к сегодняшнему дню (вместе со взятым кредитом), должны равняться нулю по ставке кредита, откуда мы получаем уравнение:

$$0 = T - \frac{R}{1+i} - \frac{R}{(1+i)^2} - \dots - \frac{R}{(1+i)^n} = T - R \sum_{k=1}^n \frac{R}{(1+i)^k} = T - R \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+i}\right)^n}{1 - \frac{1}{1+i}}$$

В последнем равенстве мы воспользовались формулой для суммы геометрической прогрессии. После упрощения, мы получаем выражение для платежа  $R$  через сумму кредита, ставку и количество лет:

$$R = T \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

## 5 Полные выплаченные суммы

Несмотря на то, что платежи в разные моменты времени в общем случае обладают разной стоимостью и их необходимо приводить к единому дню, на практике бывает полезно вычислить общую сумму выплат за весь период обслуживания кредита.

Для аннуитетной схемы выплат это очень просто: каждый отчётный период выплачивается один и тот же платёж, так что общая сумма выплат вычисляется как  $S = nR$ , где  $n$  - количество отчётных периодов, а  $R$  - аннуитетный платёж, рассчитанный по формуле приведённой выше.

В случае дифференцированных платежей подсчёт суммы всех выплат требует небольших вычислений. Если сумма кредита это  $T$ , ставка кредита  $\alpha\%$  годовых и  $n$  — количество лет, на которые мы берём кредит, то каждым платежом мы гасим  $T/n$  от тела кредита и доплачиваем проценты на все, что осталось. Понятно, что в сумму всех выплат будут включаться части выплат, которыми мы гасим тело кредита и поэтому остаётся лишь подсчитать сумму выплаченных процентов. Для удобства введём обозначение  $i = \frac{\alpha}{100}$ . Проще всего начинать с конца: в последней выплате в счёт процентов мы выплатили  $i \times T/n$ , в предпоследней выплате  $i \times 2T/n$ , в третьей с конца выплате  $i \times 3T/n$  и т.д. Таким образом, выплаты процентов (если считать с конца) образуют обычную арифметическую прогрессию, сумма которой известна из школы. В итоге общая сумма выплат вычисляется следующим образом:

$$S = T + i \cdot \frac{T}{n} + i \cdot \frac{2T}{n} + \dots + i \cdot \frac{nT}{n} = T + i \cdot \frac{T}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = T \left( 1 + i \cdot \frac{n+1}{2} \right)$$