

Департамент политической науки, 2023-24 уч. год

Высшая математика

Лекция 14. Элементы теории вероятностей, часть 3 (13.12.23)

И. А. Хованская, Р. Я. Будылин, И. В. Щуров, Д. А. Филимонов

## 1 Формула полной вероятности

Рассмотрим следующую ситуацию. Допустим, в некотором вузе есть три факультета: математический, физический и химический. Факультеты отличаются по числу студентов — например, на математическом факультете учится  $\frac{1}{10}$  студентов всего вуза, на физическом —  $\frac{3}{10}$ , а на химическом — оставшиеся  $\frac{6}{10}$  (то есть  $\frac{3}{5}$ ) всех студентов вуза (см. табл. 1).<sup>1</sup> Мы также знаем, какова доля отличников на каждом факультете. Например, на математическом факультете каждый четвертый является отличником, на физическом — каждый второй студент отличник, а на химическом  $\frac{3}{4}$  студентов являются отличниками. Спрашивается, какова доля отличников в целом по вузу?

факультет	матфак	физфак	химфак
какая часть студентов учится на факультете	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$
доля отличников на факультете	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$

Таблица 1: Распределение студентов по факультетам

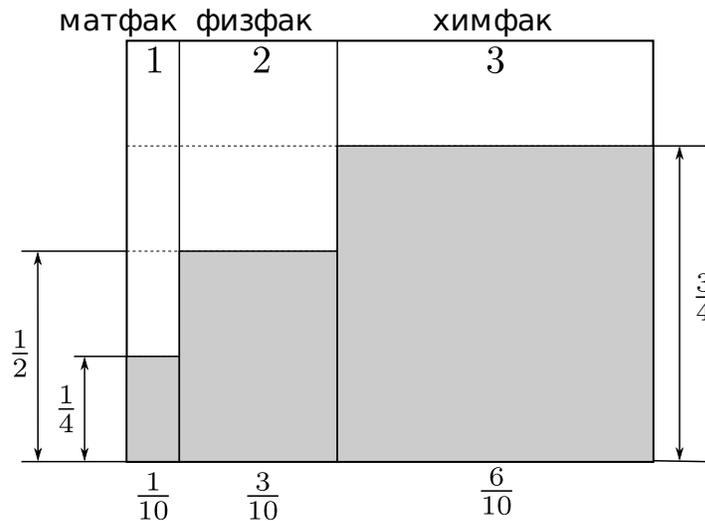


Рис. 1: Распределение студентов по факультетам. Закрашенные прямоугольники соответствуют отличникам. Их высоты — условным вероятностям.

Допустим для простоты, что всего в вузе учится 1000 студентов. Тогда на математическом факультете будет  $1000 \times \frac{1}{10} = 100$  студентов. Среди них четвертая часть (то

<sup>1</sup>Конечно, мы считаем, что каждый студент учится только на одном факультете, и каждый учится на каком-нибудь факультете из этих трёх.

есть  $1000 \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{4} = 100 \times \frac{1}{4} = 25$  человек) являются отличниками, и это составляет  $25/1000 = 0.025$  от студентов всего вуза. Нетрудно видеть, что это число не зависит от того, сколько студентов всего учится в вузе — если их  $N$  человек, то среди них  $N \times \frac{1}{10}$  учится на математическом факультете, отличников с математического факультета  $N \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{4}$  человек, и их доля среди всех  $N$  студентов вуза равна  $N \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{N} = \frac{1}{10} \times \frac{1}{4} = 0.025$ . (Вспомните задачи про фонды и компании, которые владели какими-то частями друг друга...)

Здесь также можно привести простую геометрическую интерпретацию (см. рис. 1): на рисунке, отличникам с математического факультета соответствует крайний левый закрашенный прямоугольник, ширина которого равна  $1/10$ , а высота —  $1/4$ ; общая доля отличников с математического факультета таким образом равна площади этого прямоугольника, то есть  $0.025$ .

Иными словами, можно записать:

$$\begin{aligned} & \text{Доля отличников с мат. факультета среди студентов всего вуза} = \\ & = \text{доля студентов этого факультета среди студентов всего вуза} \times \\ & \quad \times \text{доля отличников на математическом факультете} \quad (1) \end{aligned}$$

На физическом факультете учится  $1000 \times \frac{3}{10} = 300$  студентов. Отличников среди них половина, то есть  $300 \times \frac{1}{2} = 150$  человек. Это составляет  $150/1000 = 0.15$  от всех студентов вуза (средний закрашенный прямоугольник на рисунке). Наконец, на третьем — химическом — факультете учится  $1000 \times \frac{6}{10} = 600$  студентов. Из них три четверти отличники, то есть  $600 \times \frac{3}{4} = 450$  студентов, что составляет  $450/1000 = 0.45$  от всех студентов вуза (крайний правый закрашенный прямоугольник).

Поскольку каждый отличник учится ровно на одном факультете, чтобы найти число всех отличников, достаточно сложить полученные числа: всего отличников  $25 + 150 + 450 = 625$  человек. Доля отличников по всему вузу составляет  $625/1000 = 0.625$ . Заметим, что к тому же результату мы бы пришли, если бы складывали доли отличников от всего вуза по каждому факультету:  $0.025 + 0.15 + 0.45 = 0.625$ . Такую долю составляет закрашенная часть большого прямоугольника на рисунке 1 от всего большого прямоугольника. Ответ не изменился бы, если бы в вузе училось не 1000 студентов, а любое другое число (проверьте!).

Переведем теперь рассмотренную задачу на язык теории вероятностей. Допустим, мы выбираем случайного студента вуза. Пространство элементарных исходов здесь совпадает со множеством всех студентов (по-прежнему будем считать, что их 1000 человек). Можно рассмотреть различные события — например, событие  $H_1$  — «студент учится на математическом факультете», событие  $H_2$  — «студент учится на физическом факультете», событие  $H_3$  — «студент учится на химическом факультете», а также событие  $A$  — «студент является отличником». Каковы вероятности таких событий?

Событию  $H_1$  («студент учится на математическом факультете») благоприятствует столько исходов, сколько студентов учится на матфаке. Вероятность события  $H_1$  в таком случае равна отношению числа студентов математического факультета к числу студентов всего вуза, то есть будет в точности совпадать с долей студентов мат. факультета во всём вузе — по условию, она равна  $1/10$ . Аналогично обстоит ситуация с событиями  $H_2$  и  $H_3$ .

Событию  $A$  («студент оказался отличником») благоприятствует столько исходов, сколько отличников учится в вузе (в примере — 625 человек). Таким образом, вероятность случайно выбрать отличника из всего вуза — это в точности доля студентов-отличников во всем вузе (то есть  $0.625$ ).

Допустим теперь, что мы выбрали случайного студента среди студентов математического факультета. Какова в таком случае вероятность, что он окажется отличником? С точки зрения теории вероятностей, это будет *условная вероятность события  $A$  при условии  $H_1$*  (то есть  $P(A|H_1)$ ). Нетрудно видеть, что эта вероятность в точности равна доле отличников среди студентов математического факультета (то есть  $1/4$ ).

Предположим, что мы знаем только те данные, которые приведены в условии задачи. Иными словами, нам даны вероятности событий  $H_1, H_2, H_3$ , а также условные вероятности события  $A$  при условиях  $H_1, H_2, H_3$  (то есть  $P(A|H_1), P(A|H_2), P(A|H_3)$ ). Мы также знаем, что события  $H_1, H_2, H_3$  попарно несовместны (то есть один студент может учиться только на одном факультете) и вместе образуют всё пространство элементарных исходов (любой студент учится хотя бы на одном факультете). Иными словами, эти события разбивают всё пространство элементарных исходов на несколько непересекающихся частей — в этом случае такие события часто называют *гипотезами*, и говорят, что они образуют «полную систему событий». Тот факт, что гипотезы попарно несовместны, и что в объединении они дают всё пространство элементарных событий очень важен — он означает, что всегда реализуется в точности одна гипотеза.

Нетрудно видеть, что по указанным данным можно найти вероятность события  $A$  (то есть долю отличников среди студентов всего вуза) — точно таким образом, как мы это сделали выше. Запишем приведенное решение в терминах теории вероятностей:

Напомним, что  $P(A|H_1)$  — это доля отличников на математическом факультете,  $P(H_1)$  — доля студентов математического факультета на всем вузе, и значит  $P(A|H_1) \times P(H_1)$  — доля отличников с математического факультета среди всех студентов вуза (см. формулу (1)). Иными словами, это то же самое, что  $P(AH_1)$  — вероятность одновременного выполнения  $A$  и  $H_1$  (в примере — вероятность выбрать одного из 25 отличников с математического факультета — она составляет 0.025). Аналогично  $P(A|H_2) \times P(H_2)$  — доля отличников со физического факультета среди всех студентов вуза,  $P(A|H_3) \times P(H_3)$  — доля отличников с химического факультета среди всех студентов вуза. Складывая эти доли, получаем долю всех отличников вуза, то есть  $P(A)$ .

$$P(A) = P(A|H_1) \times P(H_1) + P(A|H_2) \times P(H_2) + P(A|H_3) \times P(H_3), \quad (2)$$

Говоря человеческим языком, это означает, что доля всех отличников в вузе это сумма долей отличников каждого факультета от всех студентов вуза.

Это рассуждение можно записать более формально. Действительно, напомним, что по определению условной вероятности,

$$P(A|H_1) = \frac{P(AH_1)}{P(H_1)}, \quad (3)$$

где  $P(AH_1)$  — вероятность одновременного выполнения  $A$  и  $H_1$ . Умножая обе части этого равенства на  $P(H_1)$ , получим:

$$P(AH_1) = P(A|H_1) \times P(H_1). \quad (4)$$

С другой стороны, поскольку события  $H_1, H_2, H_3$  не пересекаются и вместе образуют всё пространство элементарных исходов, событие  $A$  можно представить как объединение кусочков, лежащих в  $H_1, H_2, H_3$ , то есть  $A = AH_1 + AH_2 + AH_3$ . События  $AH_1, AH_2, AH_3$  тоже не пересекаются, и значит их вероятности можно складывать:  $P(A) = P(AH_1 + AH_2 + AH_3) = P(AH_1) + P(AH_2) + P(AH_3)$ . Учитывая (4), имеем:  $P(A) = P(A|H_1) \times P(H_1) + P(A|H_2) \times P(H_2) + P(A|H_3) \times P(H_3)$ .

Доказанная нами формула (2) называется *формулой полной вероятности*. В общем случае гипотез может быть не три, а больше, и формула выглядит так.

Пусть имеется полная система событий  $H_1, H_2, \dots, H_n$ : все эти события попарно несовместны и их сумма составляет всё пространство элементарных исходов  $\Omega$ . Пусть нам известны вероятности  $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$  событий (гипотез)  $H_1, H_2, \dots, H_n$ . Разумеется,  $P(H_1) + P(H_2) + \dots + P(H_n) = 1$ . Пусть мы знаем условные вероятности выполнения события  $A$  при условии выполнения каждого из событий  $H_1, H_2, \dots, H_n$ , т.е.  $P(A|H_1), P(A|H_2), \dots, P(A|H_n)$ . Тогда вероятность события  $A$  (полная вероятность) составляет

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \dots + P(H_n)P(A|H_n)$$

### Пример:

1. На столе лежат три монетки: две обыкновенные и одна с орлами с двух сторон. Наудачу выбирается одна монетка и подбрасывается. С какой вероятностью выпадет орел?

Мы могли выбрать либо обычную монетку, либо монетку с двумя орлами. В каждом из этих случаев не сложно найти вероятность выпадения орла, поэтому обозначим за  $H_1$  событие (гипотезу) — мы взяли обычную монетку, за  $H_2$  событие (гипотезу) — мы взяли монетку с двумя орлами. Интересующее нас событие  $A$  — выпадение орла на выбранной монетке. Итак, имеем:

$$\begin{aligned} P(H_1) &= 2/3, & P(A|H_1) &= 1/2 \\ P(H_2) &= 1/3, & P(A|H_2) &= 1 \end{aligned}$$

Значит,

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1 = \frac{2}{3}.$$

## 2 Формула Байеса

Вернемся к задаче об отличниках. Пусть мы выбрали случайным образом студента, и он оказался отличником. Теперь нас интересует вероятность того, что он учится, скажем, на математическом факультете. Итак, задача в отыскании условной вероятности того, что студент учится на первом факультете, при условии того, что он отличник. Что мы знаем? Вероятности  $P(H_1), P(H_2), P(H_3)$  того, что студент учится на каждом из трех факультетов, вероятности (условные!)  $P(A|H_1), P(A|H_2), P(A|H_3)$  того, что студент, учась на каждом из этих факультетов, будет отличником. Нас же интересует условная вероятность  $P(H_1|A)$ , что студент, *оказавшийся* отличником, учится на математическом факультете.

Иными словами, нам нужно вычислить, какую долю составляет площадь левого закрашенного прямоугольника на рис. 2 (выделен более темным цветом), соответствующего отличникам с математического факультета (то есть событию  $AH_1$ ), от площади всей закрашенной области (соответствующей всем отличникам, т.е. событию  $A$ ).

Напомним, что по формуле полной вероятности,  $P(A)$  представляется в виде суммы трех слагаемых, каждое из которых выражает долю отличников с соответствующего факультета от числа всех студентов вуза (на рисунке — площади соответствующих закрашенных прямоугольников):

$$P(A) = P(A|H_1) \times P(H_1) + P(A|H_2) \times P(H_2) + P(A|H_3) \times P(H_3)$$

В этом месте есть кажущееся несоответствие условию задачи. Ведь мы *знаем*, что студент оказался отличником, т.е. событие  $A$  произошло, зачем же мы ищем вероятность этого

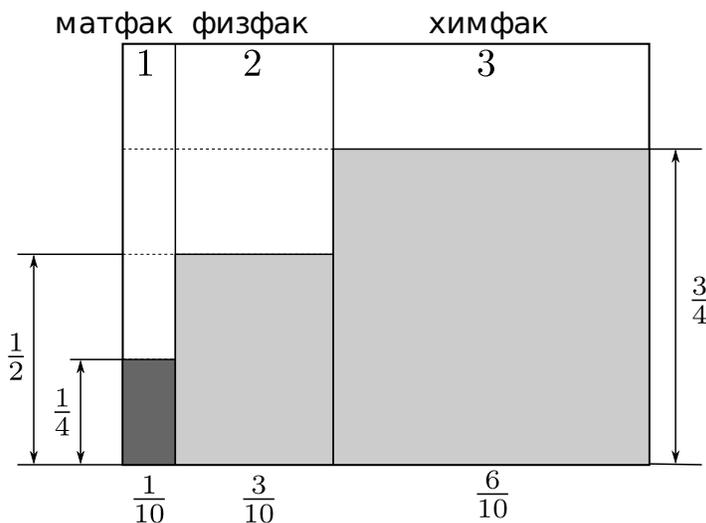


Рис. 2: Формула Байеса: вычисление условной вероятности  $H_1$  при условии  $A$  соответствует вычислению доли площади левого тёмного прямоугольника во всей закрашенной области

события? На самом деле, здесь  $P(A)$  *априорная* вероятность события  $A$ , просто вероятность выбрать отличника, выбирая случайного студента.

Нас же сейчас интересует, какую долю составляет первое слагаемое ( $P(A|H_1) \times P(H_1)$ ) в этой сумме — это и есть условная вероятность выбрать отличника с математического факультета, выбирая из всех отличников. Иными словами, нас интересует отношение

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1) \times P(H_1)}{P(A)} = \frac{P(A|H_1) \times P(H_1)}{P(A|H_1) \times P(H_1) + P(A|H_2) \times P(H_2) + P(A|H_3) \times P(H_3)}$$

Вот мы и получили *формулу Байеса* (в одной из своих записей). В рассмотренном примере интересующая нас вероятность есть отношение 25 отличников с математического факультета, ко всем 625 отличникам, то есть  $25/625 = 0.04$  (или, переходя от студентов к долям от всего вуза,  $0.025/0.625 = 0.04$ ).

Эти рассуждения также можно записать более формально. По определению условной вероятности

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1A)}{P(A)}$$

Величину  $P(A)$  мы нашли при помощи формулы полной вероятности  $P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3)$ .

Осталось найти  $P(H_1A)$ . Это вероятность того, что случайно выбранный студент окажется отличником с математического факультета. Согласно (4),  $P(H_1A) = P(AH_1) = P(A|H_1) \times P(H_1)$ .

Итак, мы получили формулу Байеса:

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1) \times P(H_1)}{P(A)} = \frac{P(A|H_1)}{P(A|H_1) \times P(H_1) + P(A|H_2) \times P(H_2) + P(A|H_3) \times P(H_3)}$$

Она, разумеется, верна в случае любого количества гипотез:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) \times P(A|H_i)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \dots + P(H_n)P(A|H_n)} \tag{5}$$

**Примеры:**

1. На столе лежат три монетки: две обыкновенные и одна с орлами с двух сторон. Наудачу выбирается одна монетка и подбрасывается. На подброшенной монетке выпал орел. С какой вероятностью мы кидали обычную монетку?

Пусть

$H_1$  событие (гипотеза) — мы взяли обычную монетку,

$H_2$  событие (гипотеза) — мы взяли монетку с двумя орлами,

Гипотезы  $H_1$  и  $H_2$  образуют полную систему событий.

Событие  $A$  — на монетке выпал орел.

Тогда

$$P(H_1) = 2/3, \quad P(A|H_1) = 1/2$$

$$P(H_2) = 1/3, \quad P(A|H_2) = 1$$

Значит,

$$P(A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$$

Это и неудивительно: хотя на странной монетке орлы встречаются в два раза чаще, чем на обычной, зато на нашем столе обычные монетки встречаются в два раза чаще, чем странные.

2. Тест на ВИЧ выдает верный результат в 95% случаев. Известно, что ВИЧ заражена 1/1000 часть всего населения. Человек получил положительный результат теста на ВИЧ (то есть по результатам теста он заражен). С какой вероятностью он действительно заражен?

Пусть

$H_1$  событие (гипотеза) — человек заражен ВИЧ,

$H_2$  событие (гипотеза) — человек не заражен ВИЧ.

Гипотезы  $H_1$  и  $H_2$  образуют полную систему событий.

Событие  $A$  — тест дал положительный результат.

Тогда

$$P(H_1) = 0,001, \quad P(A|H_1) = 0,95$$

$$P(H_2) = 0,999, \quad P(A|H_2) = 0,05$$

Значит,

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)} = \frac{0,001 \times 0,95}{0,001 \times 0,95 + 0,999 \times 0,05} \approx 0,0187$$

Результат кажется удивительным: ведь ошибка теста всего 5%, как же могло получиться, что вероятность заболевания при положительном результате теста так мала? Дело в том, что среди людей, получивших положительный результат теста, гораздо больше получивших ложный положительный результат (5% от 99,9% населения), чем людей, действительно зараженных ВИЧ (0,1% населения), а тем более, действительно больных, получивших положительный результат теста — см. рисунок 3.



Рис. 3: Применение формулы Байеса в случае теста на ВИЧ. Тонкая полоска слева — люди, зараженные ВИЧ. Темный закрашенный прямоугольник — те из них, кто получил положительный результат теста. Длинный закрашенный прямоугольник справа — здоровые люди, получившие положительный результат теста. Доля больных людей мала по сравнению со всеми людьми, получившими положительный результат.