Департамент политической науки, 2023-24 уч. год
Высшая математика
Лекция 12. Элементы теории вероятностей, часть 1 (29.11.2023)
И. А. Хованская, Р. Я. Будылин, И. В. Щуров, Д. А. Филимонов

1 Основные понятия

Множество элементарных исходов Пусть должно произойти испытание, исход которого неизвестен, но берётся из какого-то определённого, известного нам множества. Классические примеры ситуаций: я брошу игральную кость, что на ней выпадет? Посмотрим завтра в газеты, какая будет цена на нефть? Выйдем на улицу 15 января 2050 года, какая будет температура воздуха? Мы используем здесь слово «испытание» или «опыт», но совершенно не обязательно речь идёт о каких-то научных экспериментах — мы испытываем окружающий мир с разных сторон. Множество всех возможных исходов случайного эксперимента, неразложимых на более простые и попарно несовместных, будем называть *множеством элементарных исходов*.

Примеры.

1. Если мы кидаем игральную кость, то пространством элементарных исходов можно считать числа от 1 до 6.
2. Если мы обсуждаем температуру 15 января 2023 года, то пространством элементарных исходов можно считать числа от -100 до $+100$.
3. Исходом случайного испытания необязательно должно быть число. Что выпадет при бросании монетки: орёл или решка? На кого из ребят падёт жребий водить в игре: на Саню, Петю, Митю или Лену?

Здесь мы вплотную встречаемся с элементами математического моделирования. Разве мы перечислили все исходы при бросании кубика? Конечно, нет. Ведь кубик мог лететь высоко или низко, упасть далеко или близко, задеть чей-то лоб, закатиться под стол и т. д. и т. п. Нас же интересует только, какое число выпало на верхней грани кубика.

События и благоприятные исходы Множество всех элементарных исходов обычно обозначается буквой Ω. *Событием* мы будем называть любое подмножество множества элементарных исходов. Если элементарный исход принадлежит какому-то событию, мы будем говорить, что элементарный исход *благоприятствует* этому событию, элементарный исход *благоприятный* для этого события.

Примеры.

1. Случайное испытание: что выпадет на игральной кости? Случайное событие A — на кубике выпало чётное число — описывается таким подмножеством множества Ω : $\{2, 4, 6\}$. Исход бросания кубика «2» благоприятствует событию A, это благоприятный исход для выпадения чётного числа.
2. Случайное испытание: какая будет погода 15 января 2020 года? Случайное событие B — на улице 15 января 2020 года холодно — описывается таким подмножеством множества $\Omega : \{[-100; -5]\}$. Исход измерения температуры -20 благоприятствует событию B, а $+10$ — не благоприятствует.

3. Случайное испытание: троекратное бросание монетки. Случайное событие C — выпадение хотя бы двух орлов. Элементарный исход «орёл, решка, орёл» благоприятствует событию C, а элементарный исход «решка, решка, орел» не благоприятствует событию C.

Мы видим, что обычное, «бытовое» понятие события описывается на языке множеств—подмножеств.

Несовместные события Если два события не могут произойти одновременно, мы будем называть их *несовместными*. На языке подмножеств это означает, что не найдется ни одного элементарного исхода, принадлежащего обоим событиям.

Примеры.

1. При бросании игральной кости события A — выпадение чётного числа и B — выпадение числа, меньшего трёх — совместны, т. к. элементарный исход «выпадение двойки» благоприятен для обоих событий. Заметим, что не все элементарные исходы, благоприятные A, благоприятны и B: скажем, элементарный исход «выпадение четвёрки» благоприятен событию A, но не благоприятен B.
2. Случайное испытание: троекратное бросание монетки. Случайное событие A — выпадение хотя бы двух орлов и B — выпадение хотя бы одной решки. Эти события совместны: элементарный исход «решка, орёл, орёл» благоприятствует обоим событиям. Предположим, событие C заключается в том, что количество выпавших решек больше, чем количество выпавших орлов. Тогда события A и событие C несовместны.

Пересечение (произведение) событий Пусть A и B некоторые события. Событие C, состоящее в том, что выполняются события A и B, мы будем называть *пересечением* или *произведением* событий A и B и обозначать AB или $A \cap B$.

Примеры.

При бросании игральной кости события A — выпадение чётного числа и B — выпадение числа, меньшего трёх. Событие AB состоит в выпадении чётного числа меньшего трёх, т. е. в выпадении двойки.

Случайное испытание: троекратное бросание монетки. Случайное событие A — выпадение хотя бы двух орлов и B — выпадение хотя бы одной решки. Событие AB состоит в выпадении двух орлов и одной решки, ему благоприятны следующие элементарные исходы: «орёл, орёл, решка», «орёл, решка, орёл» и «решка, орёл, орёл».

Рассмотрим такую ситуацию, в которой все исходы «равноправны», то есть встречаются одинаково часто, если повторять эксперимент много раз. Скажем, элементарные исходы «1», «2», «3», «4», «5», «6» при бросании игральной кости естественно считать равноправными (если, конечно, кость не кривая), а вот в случайном испытании «Встречу ли я динозавра, выходя сегодня из дверей университета?» исходы «да» и «нет» равноправными не являются.

Вероятность события *Вероятностью события* A в случае равноправности элементарных исходов, мы будем называть отношение количества элементарных исходов, благоприятных событию A к общему количеству элементарных исходов:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

Примеры.

Найдём вероятность выпадения чётного числа на игральной кости: $P(A) = N(A)/N(\Omega) = 3/6 = 1/2$, т. к. на игральной кости всего три чётных числа: 2, 4, 6.

Найдём вероятность выпадения хотя бы одной решки при троекратном бросании монетки.

Вот все возможные исходы, их восемь:
«орёл, орёл, орёл»
«орёл, орёл, решка»
«орёл, решка, орёл»
«орёл, решка, решка»
«решка, орёл, орёл»
«решка, орёл, решка»
«решка, решка, орёл»
«решка, решка, решка»

Событию «выпала хотя бы одна решка» благоприятны семь исходов, все кроме первого. Итак, искомая вероятность: $P(A) = N(A)/N(\Omega) = 7/8$.

Заметим, что *сумма вероятностей всех элементарных исходов случайного эксперимента равна единице*:

$$N(\Omega) \times \frac{1}{N(\Omega)} = 1.$$

Пример 1. Случайный эксперимент: кидаем игральную кость. Имеем шесть возможных элементарных исходов, вероятность каждого 1/6, сумма вероятностей равна 1.

Дополнительные события Мы будем говорить, что события A и B являются *дополнительными*, если A и B вместе составляют все пространство элементарных исходов Ω и являются несовместными.

Пример 2. События A — на игральной кости выпало чётное число и B — на игральной кости выпало нечётное число — являются дополнительными: действительно, каждое выпавшее на игральной кости число будет обязательно или чётным, или нечётным.

Сумма вероятностей дополнительных событий равна единице.

Примеры.

Пусть события A — на игральной кости выпало чётное число и B — на игральной кости выпало нечётное число. Тогда $P(A) = 3/6 = 1/2$, т. к. событию A благоприятны три исхода: выпадение «2», «4» или «6»; $P(B) = 3/6 = 1/2$, т. к. событию B благоприятны три исхода: выпадение «1», «3» или «5». Сумма вероятностей $P(A) + P(B) = 1/2 + 1/2 = 1$.

В общем же случае верна следующая теорема.

Теорема (Теорема сложения вероятностей)**.** *Для любых двух событий A и B вероятность того, что хотя бы одно из событий произойдёт равна сумме вероятностей событий A и B минус вероятность их одновременного выполнения:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$