

Департамент политической науки, 2023-24 уч. год

Высшая математика

Производная. (08.11.2023)

И. А. Хованская, Р. Я. Будылин, И. В. Щуров, Д. А. Филимонов

Некоторые задачи основаны на книге James Stewart, Calculus Early Transcendentals, 6e

Задача 1. Найти производные следующих функций (без использования формулы производной сложной функции):

(a) $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x}$;

(f) $f(x) = e^{-x}$;

(b) $f(x) = \log_2 x + \arcsin x - 2\operatorname{arctg}x$;

(g) $f(t) = \frac{2t}{4+t^2}$;

(c) $f(x) = (x-1)^2$;

(h) $f(x) = \operatorname{tg}(x) + \operatorname{ctg}(x)$;

(d) $f(x) = (x^3 + 2x)e^x$;

(i) $f(x) = \sin(2x)$;

(e) $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$;

(j) $f(x) = \sin(x + \alpha)$;

Задача 2. Представьте функцию в виде $y = f(g(x))$ (т.е. укажите функции $z = g(x)$ и $y = f(z)$), затем найдите производную с помощью правила дифференцирования сложной функции.

(a) $y = (2x + 1)^{2023}$;

(d) $y = \sqrt{x \sin x}$;

(g) $y = e^{\sqrt{x}}$;

(b) $y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2023}$;

(e) $y = (x^4 + 3x^2 - 2)^5$;

(h) $y = \arcsin(\sin x)$;

(c) $y = \sqrt{4 + 3x}$;

(f) $y = 10^{x^2}$;

(i) $y = \ln x^2$.

Задача 3. Вычислите и упростите производные следующих функций.

(a) $y = x \ln x - x$;

(d) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$;

(b) $y = \sin^2 x + \cos^2 x$;

(e) $y = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$;

(c) $y = -\ln \cos x$;

(f) $y = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a}$.

Задача 4. Вычислите следующие частные производные.

(a) $\left(\frac{x}{y}\right)'$;

(d) $((a+b-1)^2 + (2a+b-2)^2)'_a$;

(b) $\left(\frac{x}{y}\right)'_x$;

(e) $((a+b-1)^2 + (2a+b-2)^2)'_b$;

(c) $\left(\frac{x}{y}\right)'_z$;

(f) $(xyze^{xyz})'_z$.

Задача 5. При выполнении некоторых условий, можно считать, что распространение слухов подчиняется следующему закону:

$$p(t) = \frac{1}{1 + ae^{-kt}},$$

где $p(t)$ — доля людей, знакомых со слухом в момент времени t , константы a и k положительны.

- (a) Что будет происходить с функцией $p(t)$, если t неограниченно возрастает до бесконечности? Пояснить, что означает полученный ответ.
- (b) Найти скорость распространения слуха.

Задача 6. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = \frac{2}{1 + e^{-x}}$ в точке $(0; 1)$.

Дополнительные задачи

Задача 7. Найти производные следующих функций:

- (a) $f(x) = x^x$;
- (b) $f(x) = (2x + 1)^{3x-2}$;
- (c) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$;
- (d) $f(x) = x^{x^x}$;