

Департамент политической науки, 2023-24 уч. год

Высшая математика

Обратная функция. Логарифм (18.10.2023)

И. А. Хованская, Р. Я. Будылин, И. В. Щуров, Д. А. Филимонов

Некоторые задачи основаны на книге James Stewart, *Calculus Early Transcendentals*, 6e.

Задача 1. Попробуйте найти обратную зависимость для функции $y = c$, где c — некоторая фиксированная константа.

Задача 2. Найдите область определения и область значения функций:

- (a) $y = x^2 - 1$;
- (b) $y = |x|$;
- (c) $y = |x - 1|$;
- (d) $y = |x| - 1$;
- (e) $y = \frac{1}{|x|}$;
- (f) $y = \sqrt{4|x| - 1}$.

Постройте графики и покажите, что для этих функций нет обратных на всей области определения.

Задача 3. В предыдущих задачах, выделите области, в которых у функции будет обратная и постройте графики обратных функций на каждой из областей.

Задача 4. Найдите обратные к следующим функциям:

- (a) $y = x$;
- (b) $y = 2x + 5$;
- (c) $y = x^2, x \leq 0$;
- (d) $y = \frac{1}{x}$;
- (e) $y = 2^{3x} - 1$;
- (f) $y = (3x + 1)^3$.

Задача 5. Выделить лучи на оси Ox , на которых у функции $f(x)$ есть обратная. Для каждого из найденных лучей, найти обратную функцию. Построить соответствующие графики.

- (a) $f(x) = -x^2$;
- (b) $f(x) = x^2 - 5x + 8$.

Задача 6. Длина окружности, площадь круга, объём шара — это функции от их радиусов. Найдите их обратные.

Задача 7. Известно, что за время t , цена акций увеличивается по закону $f(t) = 2^{2t} + 1$. То есть, в начале отсчёта при $t = 0$, одна акция стоила 2 рубля, через день стоимость была уже 5 рублей, ещё через день уже 17 рублей и так далее. Постройте график зависимости цены акций от времени. Найдите обратную зависимость. Постройте график.

Задача 8. Бактерии удваивают своё количество каждые полчаса. Предположим, что начальное количество бактерий равно 100. Если известно, что количество бактерий равно

- (a) 200,
- (b) 400,
- (c) 3200,

(d) произвольному числу M ,
чему равно время, прошедшее от начала?

Задача 9. Вы положили 100 рублей на счёт под 20% годовых (сложные проценты). Через сколько лет на вашем счёте будет

- (a) 100 рублей?
- (b) 120 рублей?
- (c) 144 рубля?
- (d) 207 рублей 36 копеек?
- (e) x рублей?

Дополнительные задачи

Задача 10. Пользуясь определением логарифма как обратной функции к показательной и свойствами показательной функции (свойствами операции возведения в степень), докажите, что следующие равенства

- (a) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$;
- (b) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$;

выполняются при всех a, b, x, y , при которых левая и правая части имеют смысл.

Определение 1. Точки A и B называются симметричными относительно прямой l , если отрезок, концами которого являются эти точки, пересекает прямую l под прямым углом, в точке C , которая делит его пополам (то есть $AC = BC$).

Задача 11. Доказать, что точки (x, y) и (y, x) являются симметричными относительно прямой $y = x$.