

Школа лингвистики, 2023-24 уч. год

Теория вероятностей

Задачи по непрерывным случайным величинам (27.02.2024)

И. В. Щуров, Д. А. Филимонов, Р. Я. Будылин

1 Различные непрерывные случайные величины

Задача 1. Время (в секундах) между двумя случайными событиями распределено по показательному закону с параметром $\lambda = 0.5$.

- Найти вероятность, что между событиями пройдёт не более 3 секунд; не более 5 секунд;
- найти вероятность, что между событиями пройдёт от 1 до 3 секунд; от 3 до 5 секунд;
- найти вероятность, что между событиями пройдёт более 1 секунды; более 3 секунд;
- найти среднее время между двумя событиями;
- найти дисперсию и стандартное отклонение времени между событиями.

Задача 2. Случайная величина ξ распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 2$. Другая случайная величина $\eta = 3\xi + 2$.

- Запишите функцию распределения $F_\xi(x)$.
- Как связаны функции распределения $F_\xi(x)$ и $F_\eta(x)$? Выпишите $F_\eta(x)$ пользуясь определением для функции распределения.
- Найти вероятность $P(\eta \leq 5)$;
- найти вероятность $P(\eta \leq -10)$;
- найти вероятность $P(3 < \eta \leq 5)$;
- найти вероятность $P(\eta > 3)$.
- Выпишите плотность распределения случайной величины ξ и η . Правда ли, что случайная величина η распределена по показательному закону?

Задача 3. Случайная величина ξ распределена по нормальному закону с параметрами $\mu = 1$ и $\sigma = 2$

- найти вероятность $P(\xi \leq 2)$;
- найти вероятность $P(\xi \leq -1)$;
- найти вероятность $P(\xi \leq -10)$;
- найти вероятность $P(-1 < \xi \leq 2)$;
- найти вероятность $P(2 < \xi \leq 3)$;
- найти вероятность $P(\xi > 2)$;
- найти вероятность $P(\xi > -1)$.

Задача 4. Случайная величина ξ распределена по нормальному закону с параметрами $\mu = 0$ и $\sigma = 1$. Другая случайная величина $\eta = 2\xi + 3$.

- Чему равны $E(\eta)$, $D(\eta)$ и $\sigma(\eta)$?
- Как связаны функции распределения $F_\xi(x)$ и $F_\eta(x)$? Как они связаны с функцией Лапласа? Можно ли указать тип распределения для η ?
- Найти вероятность $P(\eta \leq 2)$;
- найти вероятность $P(\eta \leq -10)$;
- найти вероятность $P(-1 < \eta \leq 2)$;
- найти вероятность $P(\eta > 2)$.

- (g) (*) Вычислите плотность распределения случайной величины η дифференцируя найденную в пункте b) функцию распределения.

Задача 5. Случайные независимые величины ξ и η распределены по нормальному закону с параметрами $\mu_1 = 1$, $\sigma_1 = 2$ и $\mu_2 = -1$, $\sigma_2 = 3$ соответственно.

- (a) найти $E(\xi + \eta)$, $D(\xi + \eta)$ и $\sigma(\xi + \eta)$;
- (b) найти $E(\xi - \eta)$, $D(\xi - \eta)$ и $\sigma(\xi - \eta)$;
- (c) можно ли указать тип распределения для случайных величин $\xi + \eta$ и $\xi - \eta$?
- (d) найти вероятность $P(\xi + \eta \leq 2)$;
- (e) найти вероятность $P(\xi - \eta \leq 2)$;
- (f) найти вероятность $P(-1 < \xi + \eta \leq 2)$;
- (g) найти вероятность $P(-1 < \xi - \eta \leq 2)$.

2 Формула Муавра-Лапласа

Задача 6. Производится серия из 5 независимых одинаковых экспериментов. Вероятность удачи в одном эксперименте равна $p = 0.6$. Какова вероятность, что количество удач будет

- (a) ровно 2?
- (b) ровно 3?
- (c) от 1 до 3 включительно?

Задача 7. Производится серия из 2400 независимых одинаковых экспериментов. Вероятность удачи в одном эксперименте равна $p = 0.6$. Какова вероятность, что количество удач будет

- (a) ровно 1400?
- (b) ровно 1500?
- (c) от 1000 до 1400 включительно?
- (d) от 1400 до 1500 включительно?

Дополнительные задачи

Задача 8. Пусть ξ и η независимы, распределены по закону Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно. Доказать, что $\zeta = \xi + \eta$ распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda_1 + \lambda_2$.