

Школа лингвистики, 2023-24 уч. год

Теория вероятностей

Задачи на совместное распределение дискретных случайных величин (6.02.2024)

И. В. Щуров, Д. А. Филимонов, Р. Я. Будылин

Задача 1. Дана таблица совместного распределения случайных величин ξ и η :

	η	1	2
ξ		1	2
	-1	0.2	0.1
	0	0.3	0.4

- Найти таблицы распределения ξ и η по отдельности;
- вычислить $E\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$ и $E\eta$, $D\eta$, $\sigma\eta$;
- вычислить $\text{Cov}(\xi, \eta)$ и $\rho(\xi, \eta)$.

Задача 2. Пусть на гранях тетраэдра написаны числа 1, 2, 3, 4. Мы бросаем такой тетраэдр подобно игральному кубику и смотрим на номер грани, на которую он приземлился. Пусть брошено два тетраэдра и ξ — сумма значений, а η — разность, получаемая вычитанием из первого значения второго (она, разумеется, может оказаться и отрицательной).

- Записать таблицу совместного распределения
- по таблице найти таблицы распределения ξ и η по отдельности;
- вычислить $E\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$ и $E\eta$, $D\eta$, $\sigma\eta$;
- вычислить $\text{Cov}(\xi, \eta)$ и $\rho(\xi, \eta)$.

Задача 3. Пусть взяты два случайных числа из набора $\{1; 2; 3\}$ (числа могут повторяться) и ξ — сумма значений, а η — произведение.

- Записать таблицу совместного распределения
- по таблице найти таблицы распределения ξ и η по отдельности;
- вычислить $E\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$ и $E\eta$, $D\eta$, $\sigma\eta$;
- вычислить $\text{Cov}(\xi, \eta)$ и $\rho(\xi, \eta)$.

Задача 4. Для случайных величин ξ и η из задачи 1:

- Найти таблицы распределения $\xi|_{\eta=1}$, $\xi|_{\eta=2}$;
- вычислить математические ожидания этих условных случайных величин;
- нарисовать график регрессии ξ на η ;
- нарисовать график регрессии η на ξ .

Задача 5. Пусть исследуются вопросы знания редкого языка. Есть данные по тому, с какой вероятностью человек знает язык или нет (это, разумеется, очень сильно упрощённая модель). Значение величины ξ это 1, если выбранный человек знает язык и 0, если не знает. Значение величины η — его возрастная группа (30 если возраст от 20 до 40 лет и т.д.). Дана таблица совместного распределения случайных величин ξ и η :

	η	10	30	50	70
ξ		10	30	50	70
	0	0.14	0.1	0.04	0.06
	1	0.1	0.3	0.2	0.06

- (a) Найти таблицы распределения $\xi|\eta = 10$, $\xi|\eta = 30$, $\xi|\eta = 50$, и $\xi|\eta = 70$;
- (b) вычислить математические ожидания этих условных случайных величин;
- (c) нарисовать график регрессии ξ на η . Что он означает?
- (d) Сколько точек будет содержать график регрессии η на ξ ? Как его можно интерпретировать?

Дополнительные задачи

Задача 6. Найти дисперсию числа пар подряд выпавших орлов в 100 бросках.