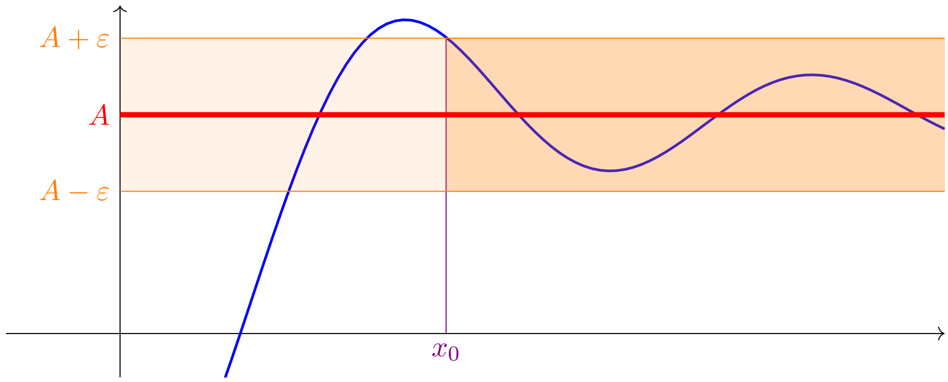
Школа лингвистики, 2023-24 уч. год
Линейная алгебра и математический анализ
Лекция 4. Пределы функций. (23.09.2023)
Д.А. Филимонов

1 Пределы функций на $\pm\infty$.

На прошлой лекции мы уже обсуждали, что для определения пределов удобно пользоваться поведением соответствующих функций. Ничто не мешает теперь вместо натуральных аргументов рассматривать произвольный аргумент x. По сравнению с пределами последовательностей, появятся всего пара отличий: во-первых, x может теперь стремиться к минус бесконечности, а, значит, необходимо будет каждый раз указывать знак бесконечности, а во-вторых, теперь придётся следить за тем, чтобы функция была определена при всех достаточно больших (или достаточно малых, если стремление к $-\infty$) значениях аргумента и учитывать поведение при всех x.

В определении нам теперь не нужно искать номера элементов последовательности, а достаточно брать все x бо́льшие чем некое x_0.



Как и ранее, определение предела можно записать на формальном языке с помощью кванторов:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists x_0 : \forall x : x \geqslant x_0 \hookrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

Это определение называется определением по Коши, его предложил французский математик Огюстен Луи Коши. Существует также определение, предложенное немецким математиком Генрихом Эдуардом Гейне, которое сводит определение предела функции к пределу последовательности. Пределом функции на бесконечности называется число A, если для любой последовательности x_n, такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, значения функции в соответствующих точках стремятся к A, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Спор о том, чьё определение лучше разрешился ничьёй: оказалось, что это эквивалентные определения. Тем не менее, для практических задач определение по Коши удобнее при доказательстве, что какое-то число действительно является пределом, а определение по Гейне, напротив, удобнее для доказательства отсутствия предела (например, достаточно найти две последовательности аргументов по которым пределы будут разным).

Мы не будем углубляться в доказательства, а запишем основные известные факты. Как и ранее, большинство значений пределов элементарных функций можно получить из их графиков:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^a) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } a > 0 \\ 0, & \text{если } a < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x^n) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } n > 0 \text{ и } n \in \mathbb{Z} \text{ — чётное} \\ -\infty, & \text{если } n > 0 \text{ и } n \in \mathbb{Z} \text{ — нечётное} \\ 0, & \text{если } n < 0 \text{ и } n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(a^x) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } a > 1 \\ 0, & \text{если } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty}(a^x) = \begin{cases} 0, & \text{если } a > 1 \\ +\infty, & \text{если } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\mathrm{arctg} x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}(\mathrm{arctg} x) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\mathrm{arcctg} x) = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}(\mathrm{arcctg} x) = -\pi$$

Если функция не определена при всех достаточно больших значениях аргумента, то ее предел на бесконечности не имеет смысла и потому говорят, что он не существует.

$$\lim_{x\to+\infty}(\mathrm{arcsin} x) \text{ не существует}$$

Также предел не может существовать если функция колеблется и не приближается ни к какому значению, или же вообще не определена в каких-то точках, которые все время встречаются при возрастании аргумента.

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin x) \text{ не существует}$$

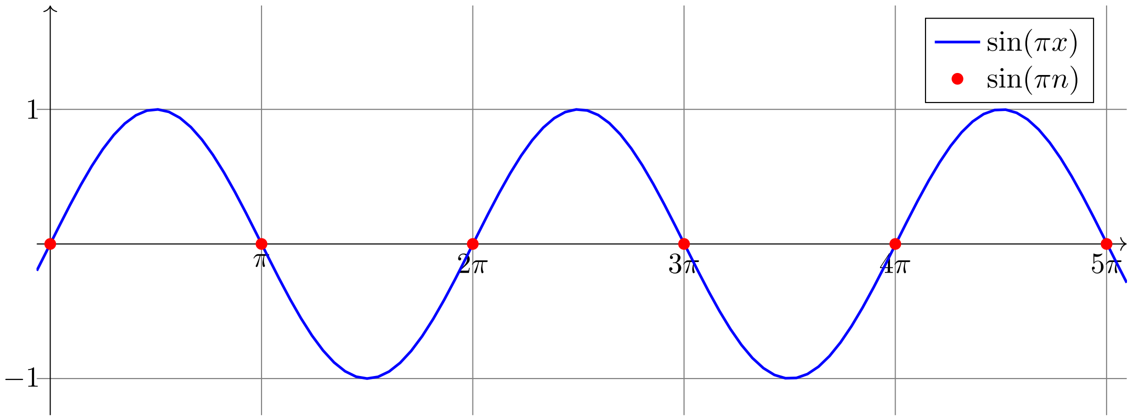
$$\lim_{x\to+\infty}(\mathrm{tg} x) \text{ не существует}$$

Вообще говоря, пределы последовательностей и пределы функций на бесконечности выглядят почти идентичными, различающимися лишь тем, что для последовательностей мы используем букву n в качестве аргумента, а для функций более привычную букву x. Тем не менее, бывают случаи, когда результаты отличаются.

$$\lim_{n\to\infty}(\sin \pi n) \;=\; 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin \pi x) \text{ не существует}$$

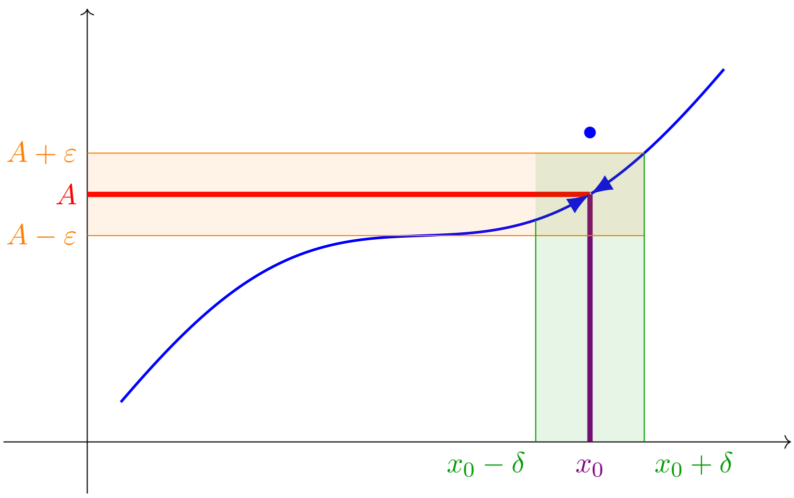
Все дело в том, что в случае последовательности нас интересуют только значения при *натуральных* n, а в этих точках $\sin \pi n = 0$. В случае же предела функции приходится учитывать поведение синуса во всех точках вообще, а он не приближается с ростом аргумента ни к какой фиксированной точке.



2 Пределы функций в конечных точках.

До сих пор мы рассматривали только случаи, когда аргумент функции (натуральный, а затем любой вещественный) стремились к бесконечности. Для натуральных чисел других вариантов не было, для вещественных добавлялся только знак бесконечности, но что мешает рассмотреть предел в конечной точке? Определение, которое было ранее, необходимо немножко усложнить, однако его смысл будет оставаться тем же самым: чем ближе должны быть значения функции к числу A, которое мы хотим считать пределом функции, тем ближе аргумент должен быть к числу x_0, в котором мы ищем этот предел. Важная деталь: когда мы считаем предел функции в конечной точке, мы рассматриваем всю функцию в окрестности этой точки, но не в ней самой. Это будет нужно для дальнейшего аккуратного построения теории.

На рисунке ниже у функции $f(x)$ в точке x_0 значение выколото, что обозначается стрелочками на самой функции и синей точкой выше. Для того, чтобы значения функции оказались в полосе от $A-\varepsilon$ до $A+\varepsilon$, аргумент приходится брать от $x_0-\delta$ до $x_0+\delta$.



Определение предела можно записать на формальном языке с помощью кванторов:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta : \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \hookrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

3 Свойства пределов.

Все свойства для пределов функций в точках (и в бесконечностях) оказываются в точности такими же, как для пределов последовательностей. Если существуют пределы последовательностей в левой и правой частях равенства, то

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} (f(x)) \pm \lim_{x\to x_0} (g(x))$$

и

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{n\to\infty} (f(x)) \cdot \lim_{x\to x_0} (g(x))$$

Если, помимо требования существования пределов последовательностей, $g(x) \neq 0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} (g(x)) \neq 0$, то

$$\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} (f(x))}{\lim\limits_{x\to x_0} (g(x))}$$

Также работают все свойства когда предел равен нулю или бесконечности.

$$\text{Если } \lim_{x\to x_0} (f(x)) = \infty, \text{ то } \lim_{x\to x_0} \left(\frac{1}{f(x)}\right) = 0.$$

$$\text{Если } \lim_{x\to x_0} (f(x)) = 0, \text{ и при этом } f(x) \neq 0, \text{ то } \lim_{x\to x_0} \left(\frac{1}{f(x)}\right) = \infty.$$

4 Замечательные пределы.

Раньше мы уже обсуждали 2-й замечательный предел. Для пределов функций есть его аналог, причём в двух формах:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Но раз существует 2-й, значит должен быть и 1-й замечательный предел! Это $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$. Исходно он представляет из себя неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, однако нет никакой простой возможности выделить в числителе сомножитель, обращающий его в ноль, который бы сокращался со знаменателем. Тем не менее, можно доказать, что данная функция стремится к числу:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

5 Примеры.

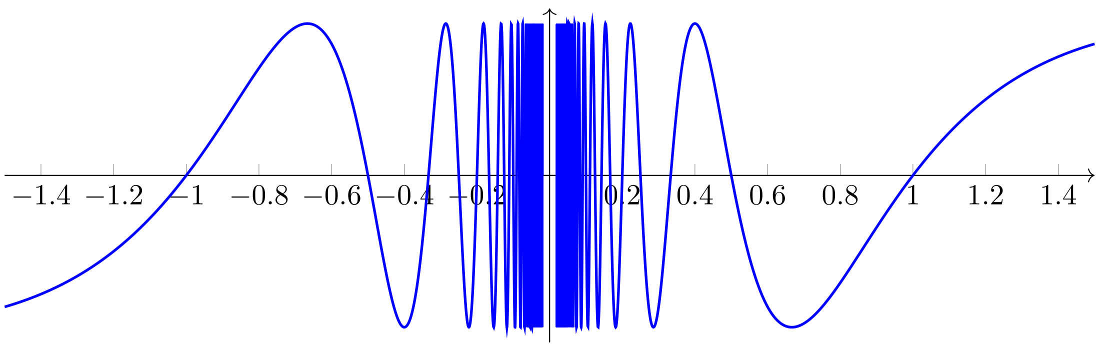
Рассмотрим несколько примеров:

Пример 1. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^3-1}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{x-1}}\right) = \lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1) = 3$

Мы воспользовались как раз тем фактом, что при подсчёте предела $x \neq 1$, а потому сокращать числитель и знаменатель на ненулевое число законно.

Пример 2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)\right)$ не существует.

Действительно, не важно, насколько близки значения x к нулю, все равно значения синуса бывают от -1 до 1. Наглядно это видно на графике.



Формальное же доказательство как раз опирается на определение предела по Гейне: для стремящейся к нулю последовательности $x_n = \dfrac{1}{n}$ предел функции $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{x_n}\right)\right) = 0$, а для другой стремящейся к нулю последовательности $y_n = \dfrac{1}{2n+0.5}$ предел функции $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{y_n}\right)\right) = 1$

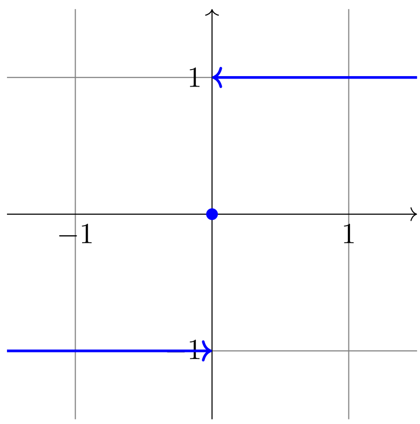
Пример 3. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x) = \infty$. Это легко видеть из графика тангенса, однако мы не можем указать знак бесконечности, поскольку значения тангенса в окрестности $\frac{\pi}{2}$ бывают как положительные, так и отрицательные.

6 Односторонние пределы.

В примере 3 мы не смогли указать знак бесконечности поскольку с одной стороны функция стремится к $-\infty$, а с другой — к $+\infty$. К счастью, у нас есть специальный символ беззнаковой бесконечности как раз для такого случая. Однако так бывает далеко не всегда. Рассмотрим функцию сигнум:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Ее график выглядит следующим образом:



В точке 0 предела у неё не существует, поскольку в любой окрестность нуля значения функции бывают близки и к 1, и к -1. Однако по графику видно, что если бы мы разрешали подходить к точке 0 только с одной стороны (слева или справа), то предел можно было бы определить. Для таких случаев вводят понятие *одностороннего* предела. Смысл его в том, что если мы разрешаем подходить к точке только слева, то в определении берём лишь $x < x_0$, а если справа, то $x > x_0$.

К сожалению, нет никакого общеупотребительного варианта для обозначения односторонних пределов. Ниже приведены те, которые чаще встречаются в литературе, однако авторы могут придумать и что-то своё.

Предел слева	Предел справа
$\lim\limits_{x\to a-} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a+} f(x)$
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$
$\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$
$\lim\limits_{x\to a^{-0}} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$
$\lim\limits_{x\nearrow a} f(x)$	$\lim\limits_{x\searrow a} f(x)$
$\lim\limits_{x\uparrow a} f(x)$	$\lim\limits_{x\downarrow a} f(x)$

Мы будем использовать обозначения из первой строчки. Для примеров, которые мы разбирали выше, можно записать:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\operatorname{tg}(x) = +\infty; \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+}\operatorname{tg}(x) = -\infty; \quad \lim_{x\to 0-}\operatorname{sgn}(x) = -1; \quad \lim_{x\to 0+}\operatorname{sgn}(x) = -1.$$

7 Непрерывность функций.

Выше при определении предела в точке мы рассматривали значения функции во всех точках рядом с той, где ищем предел, но не в ней самой. Оказывается, это важная деталь, поскольку именно благодаря ей мы сможем определить понятие непрерывности функции. Само по себе понятие непрерывности обычно можно описать как возможность построения графика функции не отрывая карандаш от бумаги. Однако в математике все должно быть строго и сперва вводится понятие непрерывности функции в одной точке: то, как ведёт себя функция в окрестности точки (куда она стремится), должно совпадать со значением этой точке.

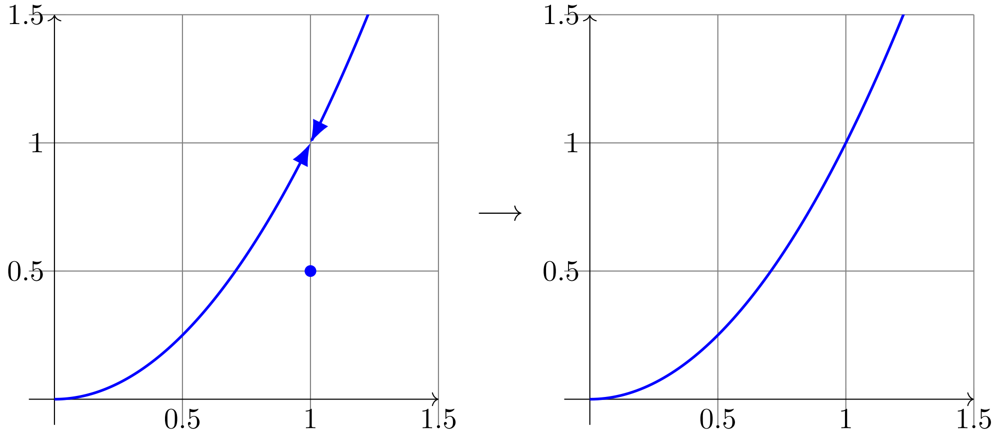
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Оказывается, что теперь, если потребовать, чтобы это условие выполнялось во всех интересующих нас точках, то функция окажется непрерывной и в указанном выше бытовом понимании. Естественно возникает вопрос про элементарные функции — в каких точках они непрерывны, а в каких нет? Ответ оказывается довольно приятным: все элементарные функции непрерывны на своей области определения. Однако бывают и разрывные функции вроде $\frac{1}{x}$ в нуле (она там не определена и поэтому правило для элементарных функций на эту точку не распространяется, но каким бы значением ее там не доопределить, непрерывная функция не получится), или $\operatorname{sgn}(x)$, график которой был выше. Оказывается, что разрывы функций тоже бывают разными и ниже мы рассмотрим их классификацию.

Разрывы первого рода.

К этим разрывам относятся случаи, когда предел в точке существует, но не равен значению функции в точке, либо сам предел не существует, но существуют односторонние пределы. Рассмотрим эти два случая.

Если существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, но его значение не равно значению функции в точке x_0, то достаточно изменить значение функции в этой точке (всего одной!) и в ней функция станет непрерывной. Такой разрыв называют *устранимым разрывом.*



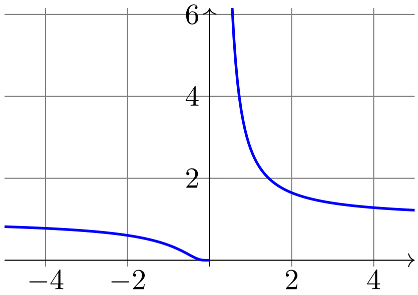
Слева у функции устранимый разрыв в точке $x_0 = 1$, а справа другая функция, которая отличается от первой лишь в одной точке, но зато стала непрерывной.

Другой случай называется *разрывом типа скачок*: в этом случае существуют, односторонние пределы в точке x_0, но они не равны между собой. В этом случае уже не важно, какое именно значение принимает сама функция в этой точке, изменением этого значения сделать функцию непрерывной не получится. В качестве примера подходит рассмотренный выше график функции $\operatorname{sgn}(x)$

Разрывы второго рода.

В случае, когда хотя бы один из односторонних пределов не существует, или же равен бесконечности, точку такого разрыва называют точкой *разрыва второго рода*. У рассмотренной выше функции $\sin(\frac{\pi}{x})$ как раз такой разрыв в точке $x_0 = 0$. И такой же разрыв будет у функции $\frac{1}{x}$ в нуле. У обеих этих функций поведение односторонних пределов одинаковое, но для разрыва второго рода достаточно, чтобы указанный тип проблемы был хотя бы с одной стороны. Рассмотрим следующую функцию и ее график.

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$



У неё лишь один односторонний предел равен бесконечности, а второй существует и равен нулю:

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = 0; \quad \lim_{x \to 0+} f(x) = +\infty$$

Тем не менее, у этой функции в нуле также разрыв второго рода.