

Школа лингвистики, 2023-24 уч. год

Линейная алгебра и математический анализ

Лекция 3. Пределы последовательностей. Арифметические действия с пределами. (19.09.2023)

Д. А. Филимонов

1 Последовательности и определение предела.

Если взять несколько последовательностей чисел, то для некоторых можно указать, к какому числу будут приближаться (математики говорят «стремиться») элементы такой последовательности. Иногда такого числа вовсе нет, а иногда это не число, а, например, бесконечность. Если же такое число существует, его называют пределом последовательности.

$$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots; \frac{1}{n}; \dots \rightarrow 0$$

$$\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \dots; \frac{n}{n+1}; \dots \rightarrow 1$$

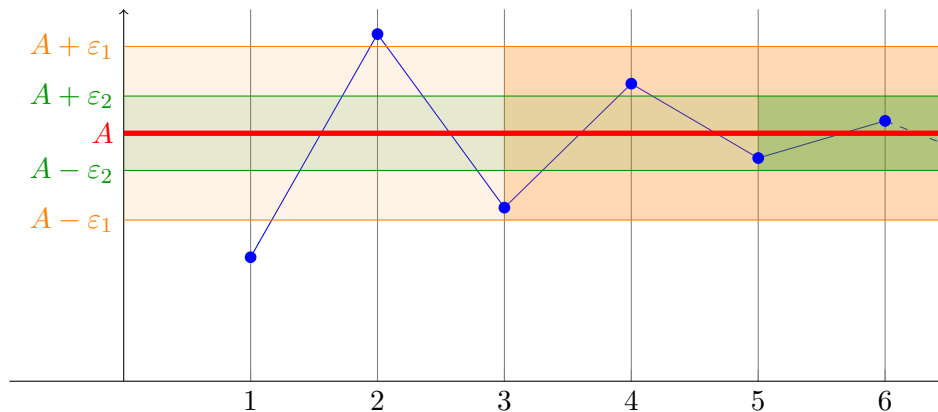
$$-1; 1; -1; 1; \dots; (-1)^n; \dots \not\rightarrow$$

$$1; 2; 3; 4; \dots; n; \dots \rightarrow +\infty$$

Для начала, необходимо строго определить, что вообще называть последовательностью чисел. Написать просто «написанные в строчку числа» не подходит, однако можно это формализовать строго. Последовательность это когда по натуральному номеру мы всегда можем сказать, чему равен соответствующий элемент последовательности. Поэтому последовательность — это функция натурального аргумента. Но принято сам аргумент (номер элемента последовательности) записывать не как аргумент функции, а нижним индексом: $\{x_n\}$ — последовательность, занумерованная натуральными индексами n .

С определением предела все несколько сложнее: последовательность может стремиться к конкретному числу с разных сторон, «прыгать» как угодно вокруг предельного значения. Поэтому нужен другой подход. Что означает, что элементы последовательности куда-то приближаются? это означает, что они оказываются все ближе и ближе к пределу. Иными словами, если взять небольшой отрезок вокруг того числа, которое мы считаем пределом, начиная с некоторого номера последовательности, все элементы с большими номерами будут попадать в этот отрезок. И такое свойство должно выполняться для всех сколь угодно маленьких отрезков. Если нарисовать элементы последовательности как точки (ведь последовательность это функция натурального аргумента), то упомянутые отрезки превратятся в полоски.

На рисунке ниже точки последовательности (синие кружки) соединены тонкими линиями, чтобы лучше было видно поведение последовательности. Красной линией обозначен предел последовательности. Кроме того, изображены две полоски: оранжевого цвета пошире для ε_1 и зелёного цвета поуже для ε_2 . Для ε_1 все элементы, начиная с третьего, попадают в оранжевую полоску, а для ε_2 приходится уже брать все элементы последовательности начиная с пятого.



Определение предела можно записать на формальном языке с помощью кванторов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Leftrightarrow |x_n - A| < \varepsilon$$

2 Свойства пределов.

Пределы довольно удобно сочетаются со всеми четырьмя арифметическими действиями. Если существуют пределы последовательностей в левой и правой частях равенства, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) \pm \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n)$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n)$$

Для того, чтобы можно было делить, необходимо, чтобы знаменатель не обращался в ноль. Поэтому, помимо требования существования пределов последовательностей, появляются два дополнительных условия: если $y_n \neq 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n) \neq 0$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n)}$$

Выше мы видели, что не всегда предел является числом, иногда хотелось бы написать символ бесконечности. Определение предела в этом случае придётся немного видоизменить, однако общая его суть останется той же самой. Формально в таком случае появятся три варианта предела: $\{-\infty, +\infty, \infty\}$. Последнее — это беззнаковая бесконечность, то есть последовательность все время увеличивается по модулю, но ее знак все время меняется.

Оказывается, что в случае когда предел знаменателя обращается в ноль, можно добавить ещё два свойства, если пользоваться введённым выше понятием бесконечности как предела.

$$\text{Если } \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = \infty, \text{ то } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x_n} \right) = 0.$$

$$\text{Если } \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = 0, \text{ и при этом } x_n \neq 0, \text{ то } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x_n} \right) = \infty.$$

Иногда, например, если $x_n > 0$, можно указать ещё и знак бесконечности, однако тут проще всего смотреть в каждом конкретном случае.

3 Известные пределы.

Арифметические свойства пределов помогают их считать, однако нужно с чего-то начинать. К счастью, пределы большинства часто встречающихся функций легко получить из их графиков или просто зная их поведение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c) = c$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^k) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } k > 0 \\ 0, & \text{если } k < 0 \end{cases}$$

$$\text{В частности, если } k > 0, \text{ то } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^k} \right) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a^n) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } a > 1 \\ 0, & \text{если } 0 < a < 1 \\ 0, & \text{если } -1 < a < 0 \text{ (поскольку } n \in \mathbb{N}, a \text{ может быть и отрицательным)} \\ \infty, & \text{если } a < -1 \end{cases}$$

Некоторые пределы уже требуют подсчёта через определение или применения каких-то хитрых методов для вычисления

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{a}) = 1, \text{ если } a > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n}) = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a^n}{n^k} \right) = +\infty, \text{ если } a > 1 \text{ и } k > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^k}{a^n} \right) = 0, \text{ если } a > 1 \text{ и } k > 0$$

Наконец, бывают совершенно нетривиальные примеры, которые также нельзя просто свести к известным с помощью арифметических действий.

3.1 Второй замечательный предел.

Есть два удивительных предела, и сейчас мы сперва разберём тот, который идёт в математике под номером два: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$. Основание степени в этом примере стремится к 1, то есть естественно ожидать, что предел тоже будет равен 1. С другой стороны, показатель степени стремится к $+\infty$, а любое число большее 1 в бесконечной степени даёт бесконечность. Получается такое перетягивание каната, которое в общем случае может кончиться любым

результатом, от 1 и до бесконечности. Однако оказывается, что в данном конкретном случае получается боевая ничья - предел равен числу, большему единицы, но не бесконечности.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2.718281828459045 \dots$$

Этот предел равен числу Эйлера — иррациональному числу, первые знаки которого указаны выше. Как мы далее увидим, это число ещё не раз встретится нам в математическом анализе, так что не удивительно, что оно появилось уже в самом начале.

4 Неопределенности.

Выше среди пределов уже встречались такие, где ответ был не очевиден и сразу воспользоваться арифметическими правилами не было никакой возможности. В таком случае говорят, что имеется *неопределённость*, а преодоление этих трудностей (как правило путём каких-то преобразований выражения) называется *раскрытием неопределённостей*. Самых неопределённостей можно придумать довольно много, однако наиболее встречающихся типов не так много. Как правило, они все связаны с тем, что либо один из пределов в арифметическом действии равен бесконечности, либо знаменатель дроби равен нулю, либо же предел чем-то напоминает неопределённость для второго замечательного предела. Поскольку просто так подставлять бесконечность в формулы или делить на ноль нельзя, разные типы неопределённостей записывают в квадратных скобках, подчёркивая, тем самым, что это лишь некая формальная запись. Вот некоторый список наиболее часто встречающихся неопределённостей:

$$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]; \left[\frac{0}{0}\right]; [\infty \cdot 0]; [\infty - \infty]; [1^\infty]; [\infty^0]$$

Решения задач, как правило, сводятся к изучению методов раскрытия неопределённостей, так что рассмотрим пример. Для того, чтобы разрешить неопределённость первого типа (бесконечность делить на бесконечность), как правило, достаточно числитель и знаменатель дроби поделить на старшую степень знаменателя.

Пример 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 2}{5n - 1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{n}}{5 - \frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (3 + \frac{2}{n})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (5 - \frac{1}{n})} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (3) + \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{2}{n})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (5) - \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n})} = \frac{3}{5}$

Можно видеть, что после деления на n , у числителя и знаменателя дроби уже оказываются конечные и ненулевые пределы, а, следовательно, результат можно получить из известных пределов с использованием арифметических свойств. Однако запись выше весьма громоздка, поэтому на письме часто пользуются краткой формой, зачёркивая стрелочкой то, что стремится к нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 2}{5n - 1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{n}}{5 - \frac{1}{n}} = \frac{3}{5}$$