

Школа лингвистики, 2023-24 уч. год

Линейная алгебра и математический анализ

О_о: O -большое и o -малое (26.09.2023)

Д. А. Филимонов

Говорят, что функция f есть O -большое от функции g при¹ $x \rightarrow +\infty$, если существует константа C , такая что для достаточно больших значений x выполнено $|f(x)| \leq C|g(x)|$.

Говорят, что функция f есть o -малое от функции g при $x \rightarrow +\infty$, если $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Задача 1. Какие из следующих равенств верны при $x \rightarrow +\infty$?

- | | |
|-----------------------|--|
| (a) $1 = O(1)$; | (n) $x^2 = o(x)$; |
| (b) $1 = o(1)$; | (o) $\log_a x = O(x)$; |
| (c) $1 = O(1\,000)$; | (p) $\log_a x = o(x)$; |
| (d) $1 = o(1\,000)$; | (q) $x = O(e^x)$; |
| (e) $1 = O(x)$; | (r) $x = o(e^x)$; |
| (f) $1 = o(x)$; | (s) $\sin x = o(x)$; |
| (g) $1 = O(0)$; | (t) $\sin x = O(1)$; |
| (h) $1 = o(0)$; | (u) $\sin x = o(1)$; |
| (i) $0 = O(1)$; | (v) $x^3 + 100x^2 - 23x + 5 = O(x^3)$; |
| (j) $0 = o(1)$; | (w) $x^3 + 100x^2 - 23x + 5 = o(x^3)$; |
| (k) $x = O(x^2)$; | (x) $x^3 + 100x^2 - 23x + 5 = o(x^4)$; |
| (l) $x = o(x^2)$; | (y) $(x^3 + 100x^2 - 23x + 5) \sin x = O(x^3)$; |
| (m) $x^2 = O(x)$; | (z) $(x^3 + 100x^2 - 23x + 5) \sin x = o(x^4)$. |

Задача 2. Какие из следующих равенств верны при $x \rightarrow 0$?

- | | |
|-------------------------|---|
| (a) $1 = O(1)$; | (j) $x = o(e^x)$ |
| (b) $1 = o(1)$; | (k) $\sin x = o(x)$; |
| (c) $x = O(x^2)$; | (l) $\sin x = O(x)$; |
| (d) $x = o(x^2)$; | (m) $x^3 + 100x^2 - 23x + 5 = O(x^3)$; |
| (e) $x^2 = O(x)$; | (n) $x^3 + 100x^2 - 23x + 5 = o(x^3)$; |
| (f) $x^2 = o(x)$; | (o) $x^3 + 100x^2 - 23x = O(x^3)$; |
| (g) $\log_a x = O(x)$; | (p) $x^3 + 100x^2 - 23x = o(x^3)$; |
| (h) $\log_a x = o(x)$; | (q) $x^3 + 100x^2 - 23x = O(x)$; |
| (i) $x = O(e^x)$; | (r) $x^3 + 100x^2 - 23x = o(x)$; |

Задача 3. Какие из следующих утверждений верны при $x \rightarrow +\infty$?

(*) Если утверждение неверно, но можно предложить разумные условия, чтобы оно стало верным, найдите их.

- Если $f(x) = o(g(x))$, то $g(x) = o(f(x))$.
- Если $f(x) = O(g(x))$, то $g(x) = O(f(x))$.
- Если $f(x) = O(g(x))$, то $f(x) = o(g(x))$.
- Если $f(x) = o(g(x))$, то $f(x) = O(g(x))$.

¹Аналогично определяются $O(g)$ и $o(g)$ и при $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow 0$, $x \rightarrow a$.

- (e) Если $f(x) = O(g(x))$, то $f(x)h(x) = O(g(x)h(x))$.
- (f) Если $f(x) = o(g(x))$, то $f(x)h(x) = o(g(x)h(x))$.
- (g) Если $f_1(x) = o(g(x))$ и $f_2(x) = o(g(x))$, то $f_1(x) + f_2(x) = o(g(x))$.
- (h) Если $f_1(x) = O(g(x))$ и $f_2(x) = O(g(x))$, то $f_1(x) + f_2(x) = O(g(x))$.
- (i) Если $f_1(x) = o(g(x))$ и $f_2(x) = O(g(x))$, то $f_1(x) + f_2(x) = O(g(x))$.
- (j) Если $f_1(x) = o(g(x))$ и $f_2(x) = O(g(x))$, то $f_1(x) + f_2(x) = o(g(x))$.
- (k) Если $f_1(x) = o(g(x))$ и $f_2(x) = o(g(x))$, то $f_1(x) \cdot f_2(x) = o(g(x))$.
- (l) Если $f_1(x) = O(g(x))$ и $f_2(x) = O(g(x))$, то $f_1(x) \cdot f_2(x) = O(g(x))$.
- (m) Если $f_1(x) = o(g_1(x))$ и $f_2(x) = o(g_2(x))$, то $f_1(x) \cdot f_2(x) = o(g_1(x) \cdot g_2(x))$.
- (n) Если $f_1(x) = O(g_1(x))$ и $f_2(x) = O(g_2(x))$, то $f_1(x) \cdot f_2(x) = O(g_1(x) \cdot g_2(x))$.
- (o) Если $f_1(x) = O(g_1(x))$ и $f_2(x) = o(g_2(x))$, то $f_1(x) \cdot f_2(x) = o(g_1(x) \cdot g_2(x))$.
- (p) Если $f_1(x) = O(g_1(x))$ и $f_2(x) = O(g_2(x))$, то $f_1(x) + f_2(x) = O(g_1(x) + g_2(x))$.
- (q) Если $f_1(x) = o(g_1(x))$ и $f_2(x) = o(g_2(x))$, то $f_1(x) + f_2(x) = o(g_1(x) + g_2(x))$.
- (r) Если $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = O(h(x))$, то $f(x) = O(h(x))$.
- (s) Если $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = o(h(x))$, то $f(x) = o(h(x))$.
- (t) Если $f(x) = o(g(x))$ и $g(x) = o(h(x))$, то $f(x) = o(h(x))$.
- (u) Если $f(x) = o(g(x))$ и $g(x) = O(h(x))$, то $f(x) = o(h(x))$.