Школа лингвистики, 2023-24 уч. год
Линейная алгебра и математический анализ
Предел функции (23.09.2023)
Д. А. Филимонов

Некоторые задачи основаны на книге James Stewart, Calculus Early Transcendentals, 6e.

Задача 1. Найти следующие пределы.

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{2x-3}$ (c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x^2+2x+2}{x-1}$ (e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^2+x-3}{-x^3+2x+1}$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1}$ (d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^3+2x+1}{-x^2+x-3}$ (f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}$

Задача 2. Построить график функции $y=f(x)$.

(a) $f(x)=|x-2|$

(b) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

(c) $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x<0\\ x+1 & x\geq 0\end{cases}$

(d) $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x\leq 0\\ \frac{1-x^2}{1-x}, & x>0\end{cases}$

Пользуясь построенными графиками, найти пределы $\lim\limits_{x\to0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to0+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to0-}f(x)$.
В пункте 2a найти также $\lim\limits_{x\to2}f(x)$, $\lim\limits_{x\to2+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to2-}f(x)$.
В пункте 2d, найдите также $\lim\limits_{x\to1}f(x)$, $\lim\limits_{x\to1+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to1-}f(x)$.

Задача 3. Пользуясь известными правилами для арифметических операций, найти следующие пределы.

(a) $\lim\limits_{x\to-2}(3x^4+2x^2-x+1)$ (d) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x^2+5x+4}{x^2+3x-4}$ (g) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{1/4+1/x}{4+x}$

(b) $\lim\limits_{x\to4-}\sqrt{16-x^2}$ (e) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(4+h)^2-16}{h}$ (h) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sqrt{1+h}-1}{h}$

(c) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}$ (f) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(2+h)^3-8}{h}$

Задача 4. Найти предел, если он существует. Если не существует, объяснить, почему.

(a) $\lim\limits_{x\to3}(2x+|x-3|)$ (b) $\lim\limits_{x\to-6}\dfrac{2x+12}{|x+6|}$ (c) $\lim\limits_{x\to0.5-}\dfrac{2x-1}{|2x^3-x^2|}$

Задача 5. Найдите пределы:

(a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{x}$ (c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{\arcsin 7x}$ (e) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$

(b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 4x}{\sin 2x}$ (d) $\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}$ (f) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x+1)}{x+1}$

Дополнительные задачи

Рассмотрим *геометрическую прогрессию* со знаменателем q, то есть последовательность чисел, у которой каждый следующий член получается из предыдущего умножением на q. Если $0 < q < 1$, такая последовательность будет убывать, поскольку каждый следующий член меньше предыдущего (при умножении на число, меньшее 1, числа уменьшаются). Пусть a_n — это n-й член последовательности, $a_1 = c$. Тогда $a_2 = cq$, $a_3 = cq^2$, $a_4 = cq^3$ и т.д. Вообще, $a_n = cq^{n-1}$ (использована степень $(n-1)$, а не n, потому что счёт начался с нуля, первому члену соответствует нулевая степень).

Пусть S_n — сумма первых n членов последовательности, то есть $S_n = a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$. Например, $S_1 = a_1 = c$, $S_2 = a_1 + a_2 = c + cq$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = c + cq + cq^2$ и т.д.

Задача 6. Доказать, что $S_n = c\dfrac{1-q^n}{1-q}$

Указание. Пусть

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = c + cq + \ldots + cq^{n-1} \tag{1}$$

Тогда можно рассмотреть число qS_n, домножив правую часть равенства (1) на q. Получим выражение, которое очень похоже на S_n, и отличается только некоторыми слагаемыми. Исходя из этого, можно записать уравнение на S_n и решить его.

Задача 7. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ если $0 < q < 1$. Найти $\lim_{n\to\infty} S_n$, если S_n — сумма первых n членов геометрической прогрессии с первым членом c и знаменателем q.

Задача 8. Постройте график функции:

(a) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg}(nx)$

(b) $f(x) = \lim\limits_{m\to\infty} \left(\lim\limits_{n\to\infty} \left(\cos^{2m}(\pi n! x)\right)\right)$