

**Школа лингвистики, 2023-24 уч. год**  
**Дискретная математика для лингвистов**  
**Графы (5 декабря года)**

*В. В. Кочергин, Ю. Г. Кудряшов, А. В. Михайлович, И. В. Щуров, И. А. Хованская*

**Задача 1.** Доказать, что следующие утверждения эквивалентны

1. Граф  $G$  является деревом.
2. В графе  $G$  любые две вершины соединены единственной цепью.
3. Граф  $G$  связан и число ребер на единицу меньше числа вершин.
4. Граф  $G$  связан, но при удалении любого ребра перестает быть связным.
5. Граф  $G$  не содержит циклов, но при добавлении любого ребра образуется цикл.
6. Граф  $G$  не содержит циклов и число ребер на единицу меньше числа вершин.

**Задача 2.** Доказать, что для любого плоского связного графа, содержащего больше одного ребра, выполняется неравенство  $2P \geq 3G$ .

**Задача 3.** Доказать, что в любом плоском связном графе содержится вершина, степень которой не больше 5.

**Задача 4.** Существует ли граф на 8 вершинах, в котором 23 ребра и есть вершина степени 1?

**Задача 5.** В некоторой стране есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр-названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9, используя эти авиалинии (возможно, с пересадками)?

**Задача 6.** В графе на 400 вершинах степень каждой вершины равна 201. Докажите, что в этом графе есть цикл длины 3.

**Задача 7.** Какое максимальное число рёбер может быть в несвязном графе с  $n$  вершинами?

**Задача 8.** В некоторой стране 15 городов, каждый из которых соединён дорогами не менее, чем с 7 другими. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через другие города).

**Задача 9.** Докажите, что граф или его дополнение связны (возможно оба связны).

**Задача 10.** Сформулируйте следующее утверждение на языке теории графов и докажите его. На каждой лекции по дискретной математике есть два студента, которые знакомы с одинаковым числом студентов (знакомство считается взаимным).

**Задача 11.** Найдите все графы-пути (т. е. графы, множество ребер которых образует простой путь) и графы-циклы (т. е. графы, множество ребер которых образует простой цикл), дополнение которых граф-путь или граф-цикл.

**Задача 12.** Пусть  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  — множество вершин некоторого графа  $G$ . Определим на множестве  $V$  двуместный предикат  $P(x, y)$ , который принимает значение «ИСТИНА» тогда и только тогда, когда вершины  $x$  и  $y$  соединены ребром. Определим на множестве  $V$  двуместный предикат  $R(x, y)$ , который принимает значение «ИСТИНА» тогда и только тогда, когда вершины  $x$  и  $y$  совпадают.

I. Используя предикаты  $P(x, y)$ ,  $R(x, y)$ , функции алгебры логики, кванторы всеобщности и существования, запишите следующее (везде рассматривается неориентированный граф, в пунктах (a) – (c) допускаются петли и кратные рёбра, в пунктах (d) – (i) граф является простым).

- (a)  $x$  и  $y$  — смежные вершины.
- (b) Существует путь длины 2 между вершинами  $x$  и  $y$ .
- (c) Граф  $G$  не содержит изолированных вершин.
- (d) Степень вершины  $x$  равна 2.
- (e) Граф  $G$  содержит ровно одну вершину степени 1.
- (f) Расстояние между вершинами  $x$  и  $y$  равно 2 (расстояние — минимальное число рёбер в пути, у которого  $x$  является началом, а  $y$  — концом)
- (g) Граф  $G$  является полным.
- (h) Вершины  $x$  и  $y$  соединены с одними и теми же вершинами.

II. Пусть  $E$  — множество неупорядоченных пар различных элементов из  $V$ . Сколько элементов содержит множество  $E$ ?

III. Определим предикат  $Q(x, y)$ , в котором первый аргумент принадлежит множеству  $V$ , а второй — множеству  $E$  и который принимает значение «ИСТИНА» тогда и только тогда, когда вершина  $x$  инцидентна ребру  $y$ . Используя предикат  $Q(x, y)$ ,  $R(x, y)$ , функции алгебры логики, кванторы всеобщности и существования, выразите предикат  $P(x, y)$ .

IV. Используя предикаты  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$ ,  $R(x, y)$ , функции алгебры логики, кванторы всеобщности и существования, запишите следующее:

- (a) Последовательность  $v_{i_0}, e_{i_1}, v_{i_1}, e_{i_2}, v_{i_2}, e_{i_3}, v_{i_3}$  является путём.
- (b) Последовательность  $v_{i_0}, e_{i_1}, v_{i_1}, e_{i_2}, v_{i_2}, e_{i_3}, v_{i_3}$  является цепью.
- (c) Последовательность  $v_{i_0}, e_{i_1}, v_{i_1}, e_{i_2}, v_{i_2}, e_{i_3}, v_{i_3}$  является простой цепью.
- (d) Последовательность  $v_{i_0}, e_{i_1}, v_{i_1}, e_{i_2}, v_{i_2}, e_{i_3}, v_{i_3}$  является циклом.
- (e) Граф  $G$  не содержит циклов длины 3. Сделать так, чтобы в выражении отрицания применялись только к предикатам  $P$  и  $Q$ .

**Задача 13.** Построить пятимерный булев куб.

**Задача 14.** Доказать, что дерево — двудольный граф.

**Задача 15.** Пусть  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  — множество вершин. Сколько существует различных графов на этих вершинах?

**Задача 16.** Рассмотрим полный граф с 4 вершинами, каждое ребро которого окрашивается в красный цвет с вероятностью  $1/5$  и окрашивается в синий цвет с вероятностью  $4/5$ .

1. Какая вероятность того, что весь граф будет окрашен в красный цвет?
2. Какая вероятность того, что граф, содержащий эти 4 вершины и все красные рёбра будет деревом?

**Задача 17.** Какие из следующих пар графов являются изоморфными и почему?

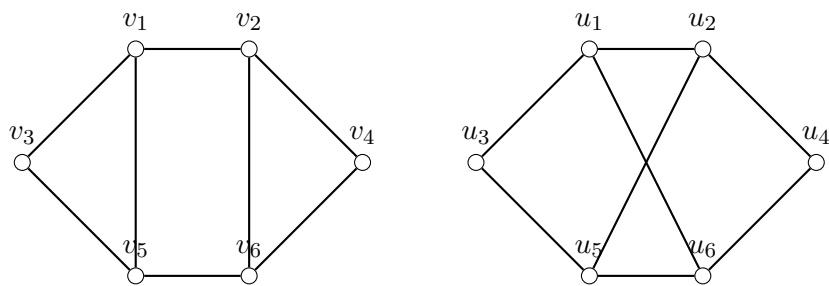


Рис 1.

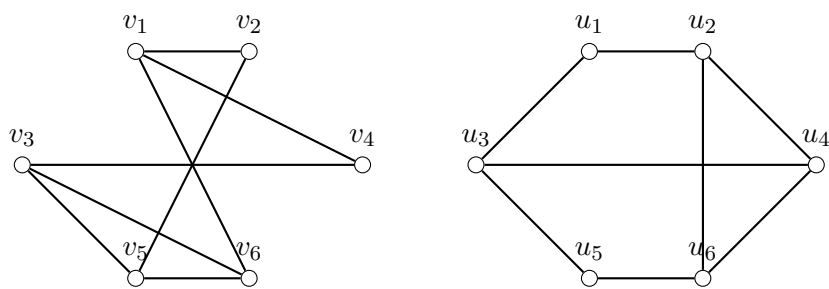


Рис 2.

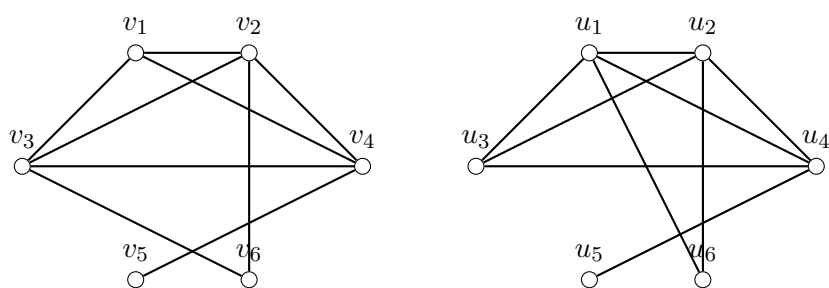


Рис 3.

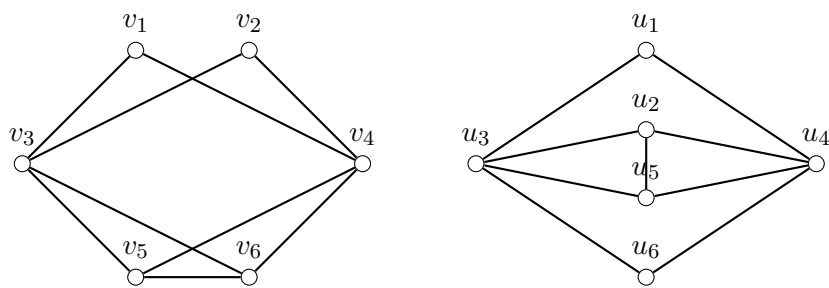


Рис 4.

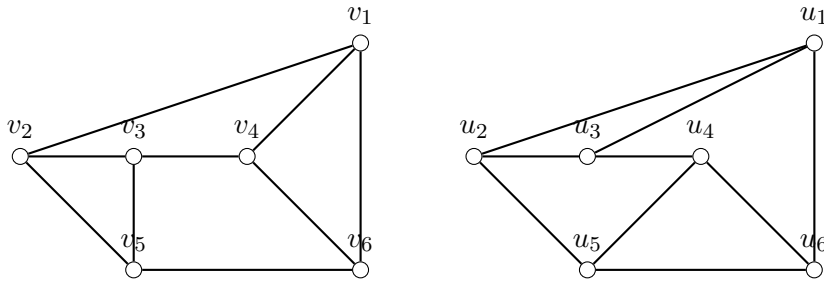


Рис 5.

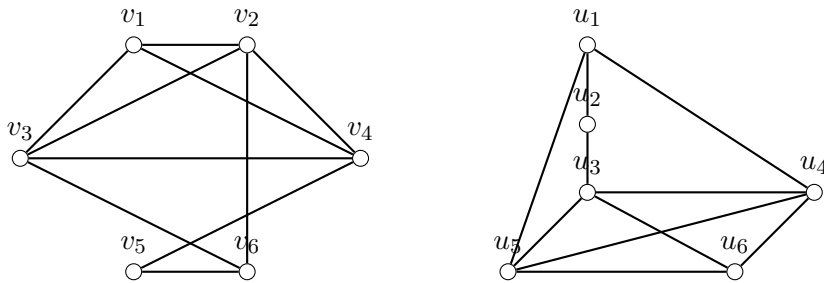


Рис 6.

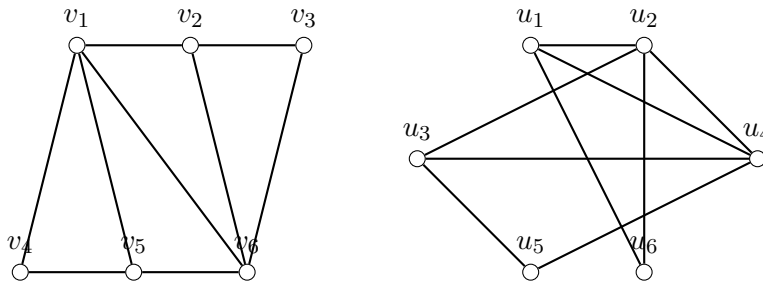


Рис 7.

**Задача 18.** Изобразить два неизоморфных графов с набором степеней вершин  $(1, 1, 2, 2, 3, 3, 4)$ .

**Задача 19.** Найти количество попарно неизоморфных графов с 12 вершинами, в которых степень каждой вершины равна 2.

**Задача 20.** Найти количество попарно неизоморфных графов с 6 вершинами и 13 рёбрами.

**Задача 21.** Найти количество попарно неизоморфных графов со следующим набором степеней вершин.

- (a)  $(6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7)$ ;
- (b)  $(4, 4, 4, 6, 6, 6, 6)$ ;
- (c)  $(13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 12, 12, 11, 11, 11, 11)$ .