

Школа лингвистики, 2023-24 уч. год**Дискретная математика для лингвистов****Четвёртая и пятая недели (26 сентября – 7 октября 2022 года)**

В. В. Кочергин, Ю. Г. Кудряшов, А. В. Михайлович, И. В. Щуров, И. А. Хованская

Задача 1. (а) Сколько функций алгебры логики $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ удовлетворяет условию $f(0, 0, 0, 0) = f(1, 1, 1, 1)$?

(б) Сколько функций алгебры логики $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ удовлетворяет условию $f(0, 0, \dots, 0) = f(1, 1, \dots, 1)$?

Задача 2. Сколько функций алгебры логики $f(x, y, z)$ существенно зависят от всех трёх переменных x, y, z ?

Задача 3. Составьте таблицы истинности для функций, заданных следующими формулами.

- | | | |
|--------------------------------------|---|--|
| (а) $\overline{x\&y}$ | (d) $x \vee \overline{y}$; | (g) $x \rightarrow y$; |
| (b) $\overline{x} \vee \overline{y}$ | (e) $x \wedge \overline{x}$; | |
| (c) $\overline{x} \vee y$; | (f) $(x \vee y) \wedge \overline{x \wedge y}$; | (h) $(x \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge y)$. |

Задача 4. Решить систему

- (а)
$$\begin{cases} x \oplus y \oplus z = xy \\ ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)) \rightarrow (\overline{y} \rightarrow \overline{z}) = 0 \end{cases}$$
- (б)
$$\begin{cases} x \oplus y \oplus z = 1 \\ xy \oplus z = 0 \end{cases}$$

Задача 5. На скольких наборах $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ функция алгебры логики $f(x_1, \dots, x_n)$ обращается в 1?

- (а) $x_1x_2x_3x_4 \oplus x_1x_2x_3x_5 \oplus x_1x_2x_4x_5 \oplus x_1x_3x_4x_5 \oplus x_2x_3x_4x_5$, ($n = 5$);
- (б) $x_1x_2x_3 \oplus x_3x_4x_5 \oplus x_6$, ($n = 6$);
- (с) $f(x_1, \dots, x_n) = (\dots((x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow x_3) \rightarrow \dots) \rightarrow x_n$.

Задача 6. Используя таблицы истинности, доказать эквивалентность формул.

- (а) $\overline{x \rightarrow y}$ и $x\overline{y}$;
- (б) $x \sim y$ и $(x \rightarrow y) \& (y \rightarrow x)$;
- (с) $x \rightarrow (y \vee z)$ и $(x \rightarrow y) \vee (x \rightarrow z)$.

Задача 7. Используя дополнительно основные эквивалентности, выяснить, эквивалентны ли формулы

- (а) $xy \vee z$ и $\overline{x}(\overline{y} \vee \overline{z})$;
- (б) $xy \oplus xz \oplus yz$ и $\overline{xy} \vee \overline{xz} \vee \overline{yz}$;
- (с) $(\overline{x} \rightarrow y) \rightarrow (\overline{xy} \sim (x \oplus y))$ и $(\overline{xy} \rightarrow x) \rightarrow y$;
- (д) $(x \oplus yz) \rightarrow (\overline{x} \rightarrow (y \rightarrow z))$ и $x \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow x)$;
- (е) $((x \vee y) \rightarrow yz) \vee (y \rightarrow xz) \vee (x \rightarrow (\overline{y} \rightarrow z))$ и $(x \rightarrow y) \vee z$.

Задача 8. Напишите отрицания к следующим утверждениям.

- (а) Сегодня хорошая погода.
- (б) $\sqrt{\pi^4 + 1} > 10$.
- (с) Если завтра будет хорошая погода, то я пойду гулять в парк.

Задача 9. На острове живут только рыцари (которые всегда говорят правду) и лжецы (которые всегда лгут). Трое из них сделали по два заявления.

Первый сказал: "На острове живёт не более 3 человек Все жители острова - лжецы"

Второй сказал: "На острове живёт не более 4 человек Не все жители острова - лжецы"

Третий сказал: "На острове живёт 5 человек На острове не менее 3 лжецов"

Сколько человек живёт на острове и сколько среди них лжецов?

Задача 10. В чашке, стакане, кувшине и банке находятся молоко, лимонад, квас и вода. Известно, что вода и молоко не в чашке; сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом; в банке не лимонад и не вода; стакан стоит около банки и сосуда с молоком. В какой сосуд налита каждая из жидкостей?

Задача 11. На аварийном пульте системы расположены 4 ламочки: L_1, L_2, L_3, L_4 . Система выключается только в том случае, когда выполняется одно из следующих условий:

(а) загорелась L_1 , но не загорелась L_2 ;

(б) загорелись L_2 и L_3 , но не горит L_4 ;

(с) загорелась L_4 и не горит L_1 .

(а) Построить таблицу функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, характеризующей условия выключения системы.

(б) Построить формулу этой функции.

Задача 12. Три друга — Пётр, Роман и Сергей — учатся на математическом, физическом и химическом факультетах. Если Пётр математик, то Сергей не физик. Если Роман не физик, то Пётр математик. Если Сергей не математик, то Роман — химик. Сможете ли вы определить специальности каждого?

Задача 13. Одного из близнецов зовут Ваня, другого — Витя. Один из братьев всегда говорит правду, а другой всегда лжет. Можно задать один вопрос одному из братьев, на который тот ответит «да» или «нет». Выясните, кого из близнецов как зовут.

Задача 14. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ и $g(y_1, \dots, y_m)$ — произвольные функции алгебры логики, существенно зависящие от всех своих переменных. Показать, что функция

$$h(x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_m) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, g(y_1, \dots, y_m))$$

также существенно зависит от всех своих переменных.

Задача 15. Функция называется *симметрической*, если она не меняется при любой перестановке своих аргументов. Найти число n -местных симметрических функций.

Задача 16. Показать, что любая симметрическая функция, отличная от константы, существенно зависит от всех своих переменных.