

Школа лингвистики, 2023-24 уч. год
Дискретная математика для лингвистов
Четвёртая неделя (26-29 сентября 2022 года)

В. В. Кочергин, Ю. Г. Кудряшов, А. В. Михайлович, И. В. Щуров, И. А. Хованская

Задача 1. Разделите с остатком

- (a) 135 на 15;
- (b) 1 000 000 на 11;
- (c) 10 000 000 на 11;
- (d) 10^n на 11;
- (e) 10 000 на 9;
- (f) 10^n на 9;
- (g) 2^{10} на $2^3 - 1$;
- (h) (-5) на 3;

Задача 2. Найдите остаток от деления

- (a) 123 456 788 765 на 10;
- (b) 7 426 945 542 на 9;
- (c) 741 238 455 на 11.
- (d) 2^{1024} на 3.

Задача 3. Верно ли, что число с суммой цифр 27 обязательно делится на 27?

Задача 4. Докажите что квадрат нечётного числа даёт остаток 1 при делении на (a) 2; (b) 4; (c) 8.

Определение 1. Целые числа a и b называются *сравнимыми по модулю n* , если имеют одинаковый остаток от деления на n . Обозначения: $a \equiv b \pmod{n}$.

Задача 5. Пусть $a \equiv b \pmod{n}$ и $c \equiv d \pmod{n}$. Доказать, что в этом случае

- (a) $(a + c) \equiv (b + d) \pmod{n}$.
- (b) $ac \equiv bd \pmod{n}$.
- (c) $a^k \equiv b^k \pmod{n}$.

Подсказка: числа a и b можно представить в виде $a = b + nk$, $c = d + nl$.

Задача 6. Всегда ли верно, что если $ak \equiv bk \pmod{n}$, то $a \equiv b \pmod{n}$ при $k \neq 0$?

Задача 7. Пусть p — простое число, $p > 3$. Доказать, что число $p^2 - 1$ делится на 24.

Задача 8. Пусть у многочлена $P(x)$ все коэффициенты целочисленные. Известно, что $P(2)$ делится на 5, $P(5)$ делится на 2. Доказать, что $P(7)$ делится на 10.

Системы счисления.

Задача 9. Десятичное число, большее нуля, кратно 16. Какое минимальное количество нулей будет в конце этого числа после перевода его в двоичную систему счисления?

Задача 10. Найти основание d системы счисления, если известно, что

$$264_d = 144_{10}.$$

Задача 11. Найти основание d системы счисления, если известно, что

$$30_d = 27_{10}.$$

Задача 12. Решить уравнение

$$224_x + 1_{17} = 101_8.$$

Задача 13. Указать десятичные записи чисел

$$20121_3, \quad 1011010, 101_2 \quad 4567, 24_8 \quad 2FE, C_{16}.$$

Задача 14. Перевести числа

$$69_{10}, \quad 111_{10}, \quad 537_{10}, \quad 1349_{10}, \quad 2470_{10}, \quad 5263_{10}$$

в системы счисления с основаниями 2, 3, 8, 12, 16, 20.

Задача 15. Перевести дробные числа

$$55, 75_{10} \quad 113, 625_{10}, \quad 1234, 5678_{10}, \quad \frac{11147_{10}}{27_{10}}$$

в системы счисления с основаниями 2, 3, 8, 12, 16, 20 (с точностью 5 знаков после запятой).

Алгоритм Евклида

Задача 16. С помощью алгоритма Евклида найти НОД чисел

$$1234 \text{ и } 234; \quad 616 \text{ и } 364; \quad 697 \text{ и } 221; \quad 2835 \text{ и } 2431.$$

Задача 17. Решить в целых числах уравнение

- (a) $1234x + 234y = 7$;
- (b) $616x + 364y = 28$;
- (c) $697x + 221y = 51$;
- (d) $2431x + 2835y = 2$.

Задача 18. Найти НОД многочленов

- (a) $2x^4 + x^3 + 4x^2 - 4x - 3$ и $4x^4 - 6x^3 - 4x^2 + 2x + 1$;
- (b) $x^4 - 2x^3 - x^2 - 4x - 6$ и $2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 10x + 8$;
- (c) $x^6 - 4x^5 + 11x^4 - 27x^3 + 37x^2 - 35x + 35$ и $x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 20x^2 + 10x - 25$;
- (d) $x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1$ и $x^2 - x - 1$;
- (e) $3x^5 + 5x^4 - 16x^3 - 6x^2 - 5x - 6$ и $3x^4 - 4x^3 - x^2 - x - 2$;
- (f) $x^4 + 5x^3 + 16x^2 + 23x + 21$ и $x^3 + x^2 + x - 3$.

Задача 19. Запись десятичного числа в системах счисления с основаниями 3 и 5 в обоих случаях имеет последней цифрой 0. Какое минимальное натуральное десятичное число удовлетворяет этому требованию?

Задача 20. Запись числа N в системе счисления с основанием 6 содержит две цифры, запись этого числа в системе счисления с основанием 5 содержит три цифры, а запись в системе счисления с основанием 11 заканчивается на 1. Чему равно N ?

Задача 21. Какое наименьшее подряд идущих натуральных чисел, меньших 1000, надо взять, чтобы их произведение делилось на любое натуральное число, меньшее 1000?

Задача 22. Есть 100 коробок, пронумерованных числами от 1 до 100. В одной коробке лежит приз, и ведущий знает, где он находится. Зритель может послать ведущему пачку записок с вопросами, требующими ответа «да» или «нет». Ведущий перемешивает записки в пачке и, не оглашая вслух вопросов, честно отвечает на все. Какое наименьшее количество записок нужно послать, чтобы наверняка узнать, где находится приз.

Задача 23. Вы — правитель средневековой империи, и завтра у вас намечается торжество. Это будет самая чумовая вечеринка из всех, что вы когда-либо устраивали. По такому поводу не грех открыть 1000 бутылок вина. Но вот незадача: одна из них отравлена.

У яда нет никаких симптомов, кроме смерти, которая наступает в течение 10–20 часов после принятия даже малейшей дозы яда.

В вашем распоряжении меньше 24 часов на то, чтобы определить, какая из бутылок отравлена. А ещё у вас есть всего 10 лабораторных мышей, и других нам так срочно взять нигде. Всё веселье будет испорчено, если умрёт кто-то, кроме них.

Есть ли возможность узнать, какая из бутылок отравлена?