

Школа лингвистики, 2023-24 уч. год
Дискретная математика для лингвистов
Четвёртая неделя (26 сентября 2023 года)

В. В. Кочергин, Ю. Г. Кудряшов, А. В. Михайлович, И. В. Щуров, И. А. Хованская

Задача 1. Вычислить суммы:

$$\begin{aligned} \text{a)} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}; & \quad \text{b)} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}; & \quad \text{c)} \sum_k \binom{n}{2k}; & \quad \text{d)} \sum_k \binom{n}{2k+1}; \\ \text{e)} \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}; & \quad \text{f)} \sum_{k=0}^s (-1)^k \binom{n}{k}; & \quad \text{j*) } 4 \sum_k \binom{n}{4k}. \end{aligned}$$

- Задача 2.** (а) Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся ни на одно из чисел 3, 5 и 7.
 (б) Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся ни на одно из чисел 6, 10, 15.
 (с) Найти число простых чисел, не превосходящих 100.

Комбинаторика (числа Фибоначчи)

Последовательность $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n, \dots$ чисел Фибоначчи определяется рекуррентным образом: $f_1 = f_2 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ при всех n , $n \geq 2$.

Задача 3. Пусть φ — «золотое сечение», т. е. $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$. Доказать, что тогда для n -го члена последовательности Фибоначчи справедливы формулы:

$$\begin{aligned} \text{a)} f_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^n - (-\varphi)^{-n}) \text{ (формула Бине);} \\ \text{b)} f_n &= \left\lfloor \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} \right\rfloor \text{ (скобки обозначают ближайшее целое число).} \end{aligned}$$

Доказать, что элементы последовательности Фибоначчи удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \text{c)} f_1 + f_2 + \dots + f_n &= f_{n+2} - 1; \\ \text{d)} f_1 + f_3 + \dots + f_{2n-1} &= f_{2n}; \\ \text{e)} f_2 + f_4 + \dots + f_{2n} &= f_{2n+1} - 1; \\ \text{f)} f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2 &= f_n f_{n+1}; \\ \text{g)} f_n^2 + f_{n+1}^2 &= f_{2n+1}; \\ \text{h)} f_{n+m} &= f_{n-1} f_m + f_n f_{m+1} = f_{n+1} f_{m+1} - f_{n-1} f_{m-1}; \\ \text{i)} f_{3n} &= f_{n+1}^3 + f_n^3 - f_{n-1}^3; \end{aligned}$$

Задача 4. Доказать, что любое натуральное число n может быть представлено, причем единственным образом, в виде

$$n = \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k f_k,$$

где $\alpha_i \in \{0, 1\}$, $\alpha_i + \alpha_{i+1} \leq 1$, $i = 2, 3, \dots$

Задача 5. Для всех $n \geq 0$ докажите равенство

$$C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \dots = f_{n+1}.$$

Комбинаторика (разное)

Задача 6. Сколькими способами из множества первых n натуральных чисел можно выбрать подмножество мощности k так, чтобы в подмножество не входили соседние числа?

Задача 7. Сколькими способами из множества первых n натуральных чисел можно выбрать подмножество мощности k так, чтобы в подмножество не входили соседние числа, считая при этом, что числа 1 и n — тоже соседние?

Задача 8. Сколькими способами король Артур может рассадить 5 пар враждующих рыцарей за круглым столом так, чтобы ни одна пара враждующих рыцарей не сидела рядом?

Задача 9. Сколькими способами можно расположить за столом шесть супружеских пар так, чтобы мужчины и женщины чередовались и никакие двое супругов не сидели рядом?

Задача 10. Пусть $N(r)$ — количество предметов, обладающих ровно r свойствами, $N_{\geq r}$ — количество предметов, обладающих не менее чем r свойствами. Докажите равенства

$$N(r) = \sum_{k=r}^n (-1)^{k-r} \binom{k}{r} S_k,$$

$$N_{\geq r} = \sum_{k=r}^n (-1)^{k-r} \binom{k-1}{r-1} S_k.$$

Задача 11. Какие строки в треугольнике Паскаля состоят только из нечетных чисел?

Задача 12. Доказать, что любые два соседних члена последовательности Фибоначчи не имеют общих натуральных делителей, отличных от 1. Более того,

$$(f_n, f_m) = f_{(n,m)},$$

где (a, b) — наибольший общий делитель чисел a и b .