

Школа лингвистики, 2023-24 уч. год**Дискретная математика для лингвистов****Вторая и третья недели (12 – 19 сентября 2023 года)***В. В. Кочергин, Ю. Г. Кудряшов, А. В. Михайлович, И. В. Щуров, И. А. Хованская***Элементы теории множеств.**

Задача 1. Про множества A и B известно, что $|B| \leq |A|$. Верно ли, что $B \subseteq A$? (через $|A|$ обозначается число элементов множества A .)

Задача 2. Известно, что $|A| = 3$, $|B| = 5$. Верно ли, что $|A \Delta B| \leq 5$? Какие значения может принимать число $|A \Delta B|$?

Задача 3. Какие из следующих утверждений верны для любых множеств A , B и C :

- a) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$; b) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$; c) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \cup B$;
d) $A \setminus (B \setminus A) = A \cap B$; e) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$ f) $A \setminus B = B \setminus A$?

Задача 4. Нарисуйте все отображения

- (a) из множества $\{1, 2, 3\}$ в множество $\{1, 2\}$;
(b) из множества $\{1, 2\}$ в множество $\{1, 2, 3\}$.

Какие отображения из множества $1, 2, 3$ в себя могут быть получены композицией отображений из пунктов а) и б)?

Задача 5. Среди следующих отображений укажите все инъекции, сюръекции и биекции¹:

- (a) $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, где $x \rightarrow nx$, $n \in \mathbb{Z}$;
(b) $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, где $x \rightarrow bx$, $b \in \mathbb{Q}$;
(c) $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, где $x \rightarrow x^2$;
(d) $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, где $x \rightarrow x^2$;
(e) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, где $x \rightarrow x^3$.

Какие из отображений обратимы?

Задача 6. На окружности отмечены 1000 белых точек и одна черная. Чего больше: треугольников с вершинами в белых точках или четырехугольников, у которых одна вершина черная, а остальные три — белые?

Задача 7. Из ста женщин африканского племени Мумбо-Юмбо 40 умеют делать ожерелья из кокосов, 70 умеют вязать набедренные повязки из банановой травы и 30 женщин умеют делать оба дела. Сколько женщин в племени не смогут сделать ни того, ни другого?

Задача 8. В том же самом племени Мумбо-Юмбо из предыдущей задачи существует особый класс женщин (всего 15), способных изловить и приготовить слона. Известно, что 7 женщин могут приготовить слона и сделать ожерелье, 5 женщин смогут приготовить слона и связать повязку и только три женщины умеют делать все три дела. Сколько дам в племени не могут сделать ничего (ни изловить и приготовить слона, ни сделать повязку, ни сделать ожерелье)?

¹ \mathbb{N} — множество натуральных чисел; \mathbb{Z} — множество целых чисел; \mathbb{Q} — множество рациональных чисел, то есть чисел вида $\frac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Q}$, $q \in \mathbb{N}$; \mathbb{R} — множество действительных чисел.

Задача 9. В группе из 50 ребят некоторые знают все буквы, кроме «р», которую просто пропускают при письме, а остальные знают все буквы, кроме «к», которую тоже пропускают. Однажды учитель попросил 10 учеников написать слово «кот», 18 других учеников — слово «рот», а остальных — слово «крот». При этом слова «кот» и «рот» оказались написанными по 15 раз. Сколько ребят написали свое слово верно? Ответ обоснуйте.

Задача 10. (Льюис Кэрролл) В ожесточенном бою 70 из 100 пиратов потеряли один глаз, 75 — одно ухо, 80 — одну руку и 85 — одну ногу. Каково минимальное число потерявших одновременно глаз, ухо, руку и ногу?

Задача 11. Докажите, что

- (а) множество точек отрезка $[5, 3]$ и отрезка $[15, 33]$ равномощны;
- (б) интервал $(0, 1)$ и луч $(0, \infty)$ равномощны.

Задача 12. Счётно ли объединение

- (а) конечного множества со счётным множеством;
- (б) конечного числа счётных множеств;
- (с) счётного числа счетных множеств?

Задача 13. Счетно ли любое бесконечное множество непересекающихся

- (а) интервалов на прямой, имеющих длину больше 1;
- (б) любых интервалов на прямой;
- (с) кругов на плоскости;
- (д) «восьмёрок» на плоскости (восьмёрка — это любые две окружности, касающиеся внешним образом);
- (е) букв «Т» на плоскости?

Задача 14. Верно ли, что квадрат со стороной единица равномощен отрезку $[0, 1]$?

Задача 15. Методом математической индукции доказать, что законы де Моргана выполняются для любого количества компонент.